



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A  
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**MECHANICKÁ ANALÝZA ZDVIŽNÉHO ZAŘÍZENÍ**

MECHANICAL ANALYSIS OF LIFTING EQUIPMENT

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

Matej Kubík

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

doc. Ing. Vladimír Fuis, Ph.D.

**BRNO 2021**



# Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky  
Student: **Matej Kubík**  
Studijní program: Strojírenství  
Studijní obor: Základy strojního inženýrství  
Vedoucí práce: **doc. Ing. Vladimír Fuis, Ph.D.**  
Akademický rok: 2020/21

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## Mechanická analýza zdvižného zařízení

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Zdvižné zařízení pro manipulaci s automobily je pohyblivou soustavou těles, kde je pasivní účinek významným prvkem, který není možné zanedbat. V rámci práce bude proveden výpočet výsledných stykových sil pro různé konfigurace soustavy. Dále bude vypočteno zrychlení s jakým se jednotlivá tělesa soustavy pohybují po překonání pasivních účinků ve vazbách.

### Cíle bakalářské práce:

1. Rešerše týkající se zvedacích zařízení.
2. Pro zvedací zařízení s uvažováním pasivních účinků provést výpočet hnací síly (resp. silové dvojice) a stykových sil ve vazbách pro různé konfigurace soustavy.
3. Posouzení funkčnosti vazeb.
4. Analýza chování soustavy po překonání hranice klidové stability.

### Seznam doporučené literatury:

JANÍČEK, P., ONDRÁČEK, E., VRBKA, J. a BURŠA, J. Mechanika těles: Pružnost a pevnost I, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno, 2004, ISBN 80-214-2592-x.

FLORIAN, Z., PŘIKRYL, K. a ONDRÁČEK, E. Mechanika těles - statika. Vyd. 3. Brno: PC-DIR, 1995, ISBN 80-214-0694-1.

KRATOCHVÍL, C. a SLAVÍK, J. Mechanika těles: Dynamika, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno, 2002, ISBN 80-214-2260-2.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2020/21

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## ABSTRAKT

Cieľom tejto bakalárskej práce je mechanická analýza zdvižného zariadenia s prihliadnutím na pasívne účinky vo väzbách. Zároveň má slúžiť ako doplnkový učebný materiál pre študentov predmetov statiky a dynamiky. Prvá časť práce je preto venovaná stručnému prehľadu zdvižných zariadení, no hlavne základných pojmov statiky a dynamiky. Práca sa následne zaoberá výpočtom hnacieho momentu (silovej dvojice) a rozborom výsledkov pre rôzne stavy zdvižného zariadenia, ktoré môžu nastať.

## KLÚČOVÉ SLOVÁ

Zdvižné zariadenie, pasívne účinky, väzba, statika, dynamika, sila, hnací moment.

## ABSTRACT

The aim of this bachelor's thesis is a mechanical analysis of the lifting device with regard to the passive effects in the bonds. At the same time, it should serve as an additional teaching material for students of statics and dynamics. The first part of the work is therefore dedicated to a brief overview of lifting devices, but especially the basic concepts of statics and dynamics. The work then deals with the calculation of the driving torque (force pair) and analysis of the results for the various situations of the lifting device that may occur.

## KEYWORDS

Lifting device, passive effects, bond, statics, dynamics, force, driving torque.

## BIBLIOGRAFICKÁ CITÁCIA

KUBÍK, M. *Mechanická analýza zdvižného zařízení*. Brno, 2021. Bakalárska práca. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedúci bakalárskej práce Vladimír Fuis.

## ČESTNÉ PREHLÁSENIE

Prehlasujem, že táto práca je mojím pôvodným dielom, spracoval som ju samostatne pod vedením vedúceho bakalárskej práce pána doc. Ing. Vladimíra Fuisa, Ph.D. a s použitím informačných zdrojov uvedených v zozname.

V Brne dňa 05.05.2021

.....

Matej Kubík

## POĎAKOVANIE

Rád by som sa touto formou poďakoval svojmu vedúcemu bakalárskej práce pánovi doc. Ing. Vladimíra Fuisa, Ph.D. za ochotu, priateľský prístup, znalosti a cenné rady, ktoré mi predal. Ďalej by som sa rád poďakoval pánovi Ing. Petrovi Marciánovi, Ph.D. za pomoc a hodnotné pripomienky pri riešení dynamickej časti bakalárskej práce. V neposlednom rade ďakujem svojej rodine a priateľom za podporu a motiváciu k štúdiu.



# OBSAH

<b>Úvod .....</b>	<b>11</b>
<b>1 Zdvíhacie zariadenia .....</b>	<b>12</b>
1.1 Klasifikácia zdvíhacích typov .....	12
1.1.1 Rutinné zdvihy .....	12
1.1.2 Nerutinné zdvihy .....	13
<b>2 Základné pojmy statiky .....</b>	<b>15</b>
2.1 Pojem sily .....	15
2.2 Statický moment sily .....	15
2.3 Silová dvojica .....	15
<b>3 Základné zákony, princípy a axiómy statiky .....</b>	<b>16</b>
3.1 Newtonove zákony .....	16
3.1.1 Zákon zotrvačnosti .....	16
3.1.2 Zákon sily .....	16
3.1.3 Zákon akcie a reakcie .....	16
3.2 Princíp superpozície .....	16
3.3 Základné axiómy .....	17
3.3.1 axióma o rovnováhe dvoch síl .....	17
3.3.2 axióma o rovnobežníku síl .....	17
3.4 Podmienky rovnováhy síl v rovine .....	17
<b>4 Väzby NNTP .....</b>	<b>19</b>
4.1 Experiment s hranolom .....	19
4.2 Experiment s valcom a hranolom .....	20
4.3 Postup pri riešení sústav telies .....	22
<b>5 Základné pojmy dynamiky .....</b>	<b>23</b>
5.1 Hmotný bod .....	23
5.2 Hybnosť hmotného bodu .....	23
5.3 Moment hybnosti .....	23
5.4 Metódy počítania .....	23
5.4.1 metóda uvoľňovania .....	23
5.4.2 metóda redukcie .....	24
5.4.3 lagrangeove rovnice druhého druhu .....	24
<b>6 Zdvíhacie zariadenie - statika .....</b>	<b>26</b>
6.1 Zadanie a rozbor .....	26
6.2 Riešenie sústavy telies pre zdvih bremena hore .....	27
6.2.1 Kinematický rozbor .....	27
6.2.2 Uvoľnenie telies .....	28
6.2.3 Označenie známych, neznámych a závislých parametrov .....	31
6.2.4 Statický rozbor .....	31
6.2.5 Riešenie sústavy rovníc .....	31
6.2.6 Kontrola funkčnosti väzieb .....	33
6.2.7 Zhodnotenie .....	34
6.3 Riešenie sústavy telies pre spúšťanie bremena dole .....	35

6.3.1	Kinematický rozbor.....	35
6.3.2	Uvoľnenie telies .....	35
6.3.3	Označenie známych, neznámych a závislých parametrov .....	38
6.3.4	Statický rozbor .....	38
6.3.5	Riešenie sústavy rovníc.....	38
6.3.6	Kontrola funkčnosti väzieb .....	40
6.3.7	Zhodnotenie .....	40
<b>7</b>	<b>Zdvižné zariadenie - dynamika.....</b>	<b>41</b>
7.1	Zadanie a rozbor .....	41
7.2	Riešenie sústavy telies pre zdvih bremena hore .....	41
7.2.1	Kinematický rozbor.....	41
7.2.2	Uvoľnenie telies .....	41
7.2.3	Označenie známych, neznámych a závislých parametrov .....	42
7.2.4	Statický rozbor .....	42
7.2.5	Riešenie sústavy rovníc.....	42
7.2.6	Kontrola funkčnosti väzieb .....	44
7.2.7	Zhodnotenie .....	45
7.3	Riešenie sústavy telies pre spúšťanie bremena dole .....	46
7.3.1	Kinematický rozbor.....	46
7.3.2	Uvoľnenie telies .....	46
7.3.3	Označenie známych, neznámych a závislých parametrov .....	46
7.3.4	Statický rozbor .....	46
7.3.5	Riešenie sústavy rovníc.....	46
7.3.6	Kontrola funkčnosti väzieb .....	48
7.3.7	Zhodnotenie .....	49
<b>8</b>	<b>Spúšťanie výťahu bez závažia .....</b>	<b>50</b>
8.1	Zhodnotenie.....	53
<b>9</b>	<b>Záver.....</b>	<b>54</b>
	<b>Zoznam použitých skratiek a symbolov.....</b>	<b>56</b>
	<b>Zoznam príloh .....</b>	<b>57</b>
	<b>Prílohy .....</b>	<b>58</b>

## ÚVOD

Zo skúseností vieme, že keď na seba položíme dve telesá, ktoré sa dotýkajú v styčných miestach a chceme s nimi pohnúť, tak aj keď tam je stupeň voľnosti, pohyb je možný. K tomu, aby sme ich posunuli je však potrebná istá sila. Aj keď to robíme s čo možno najnižším zrýchlením. Reálne telesá sa pri dotyku deformujú a na dotykových plochách vznikajú silové účinky, ktoré bránia v ich pohybe. Tieto silové účinky nazývame pasívne odpory. Keďže sa sústava telies začne pohybovať až po prekonaní pasívnych odporov, nastáva rovnováha síl za iných silových pomerov ako pri idealizovanej sústave.

Táto bakalárska práca sa bude zaoberať zdvihmi a zdvižným zariadením. V základných pojmoch sa oboznámime so základným pojmom sily a statickým momentom sily a silovou dvojicou, pretože sú dôležité vzhľadom na porozumenie východiskovej teórie. Ďalej si priblížime zákony súvisiace s oblasťami statiky a dynamiky, ktoré sú opísané v štvrtej a v piatej kapitole.

V nasledujúcich kapitolách pokračuje praktická časť bakalárskej práce a to postup výpočtu sústavy telies s pasívnymi účinkami. Práca sa bude venovať analýze a rozboru výsledkov a kontrole funkčnosti väzieb.

# 1 ZDVÍHACIE ZARIADENIA

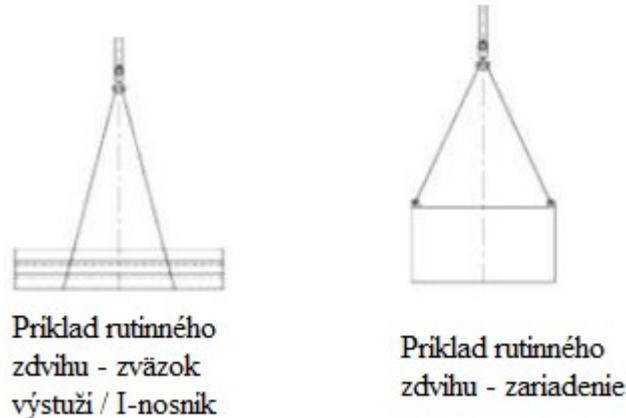
Zdvíhacie zariadenie je pracovné zariadenie na zdvíhanie, alebo spúšťanie bremien. Patrí sem aj zdvíhacie príslušenstvo a prídavné zariadenia, ktoré sa používajú na ukotvenie, upevnenie alebo oporu zariadenia [1].

## 1.1 KLASIFIKÁCIA ZDVÍHACÍCH TYPOV

Všeobecne existujú dva druhy zdvihu - rutinné a nerutinné. Kategorizovanie typu zdvihu pred plánovaním zdvihu a zdokumentovaním zdvíhacieho plánu je kritické, pretože umožňuje správne posúdenie množstva rizika prítomného pri zdvíhacej činnosti a úrovne kontroly potrebnej na zmierňovanie súvisiacich rizík.

### 1.1.1 RUTINNÉ ZDVIHY

Rutinné zdvíhacie operácie môžu byť realizované podľa základného zdvíhacieho plánu. Tieto plány musia jasne definovať limity bremien, zdvíhacie metódy a oblasti operácií. V každom prípade bude vyžadované posúdenie rizík a ich autorizovanie pred začatím. Nerutinné zdvihy môžu byť tiež zhotovené podľa podobných dokumentov ale budú vyžadovať podrobnejšie detaily. Pred začatím akejkoľvek zdvíhacej operácie musí byť vykonané preskúmanie zdvíhacieho plánu.



Obr. 1: Príklady rutinného zdvihnutia

Rutinný zdvih je zdvih, ktorý vyhovuje nasledujúcim faktorom:

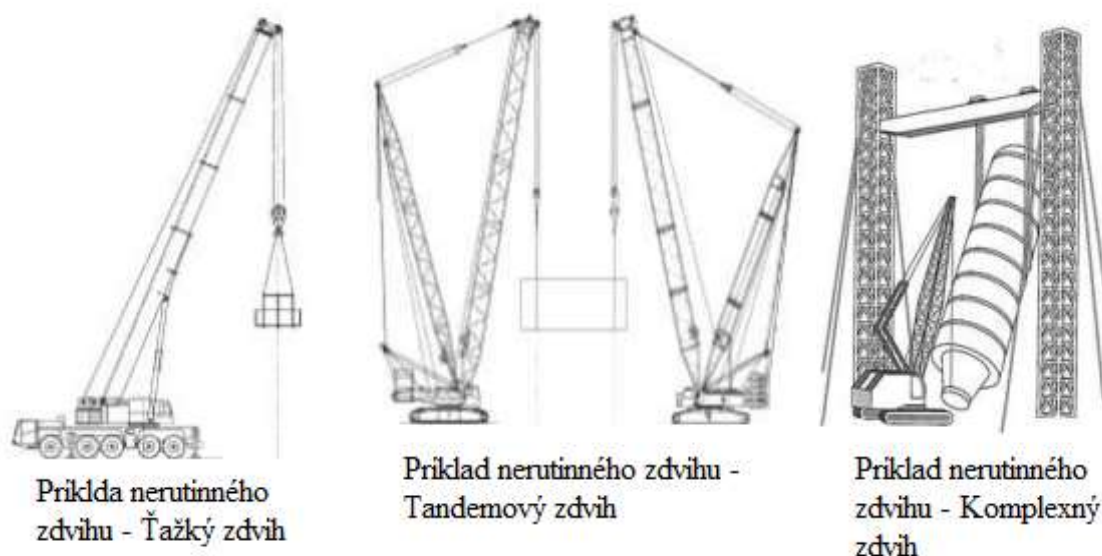
- V rámci bežných prevádzkových parametrov žeriavu.
- Zdvíhanie nad necitlivými oblasťami.
- Vhodné podmienky prostredia.
- Bremeno je určené, vyhodnotená hmotnosť, tvar a ťažisko.
- Štandardné usporiadanie vybavenia.
- Rutinné, opakujúce sa zdvíhacie operácie používajúce rovnaké vybavenie.
- Bremeno má vopred stanovenú hmotnosť, tvar a ťažisko.

- Činnosť alebo séria činností vykonávaných sa opakovane, manuálne alebo automaticky.
- Poradie činností sa opakuje.
- Rovnaké vybavenie.
- Rovnaká kompetentná obsluha žeriavov.
- Bremeno pod 75% menovitého zaťaženia podľa záťažového diagramu.
- Vybavenie špecificky inštalované kompetentnou obsluhou/inštalátorom.
- Bremeno je určené, vyhodnotená hmotnosť.
- Ťažisko je umiestnené pod zdvíhacím hákom.
- Použitie preskúšaného zdvíhacieho bodu.
- Dostatok svetlej výšky.
- Mimo citlivých, zložitých alebo obmedzených priestorov.
- Jediný zdvíhajúci stroj.
- Nepravdepodobne ovplyvnené zmenami prostredia.
- Štandardné usporiadanie vybavenia.
- Vhodná plocha na uloženie.

Poznámka: rutinné zdvíhacie operácie vyžadujú vyššie zmienené faktory na to, aby boli považované za rutinné ale tento zoznam nie je úplný. Riziko každého individuálneho zdvihu by malo byť osobitne zvážené pred zaradením zdvižnej operácie ako rutinej.

### 1.1.2 NERUTINNÉ ZDVIHY

Nerutinné zdvíhacie operácie budú vyžadovať detailnejší zdvíhací plán obsahujúci všetky prvky popísané v týchto usmerneniach. Plán bude musieť byť schválený zodpovednou osobou pred začatím akejkoľvek zdvíhacej operácie a každá požiadavka o odchýlku od plánu musí byť taktiež dostať schválenie zodpovednej osoby pred začatím zdvíhacej operácie.



Obr. 2: Príklady nerutinného zdvihu

Nerutinný zdvih je zdvih, ktorý vyhovuje nasledujúcim faktorom:

- Použitie dvoch alebo viacerých zdvíhacích prístrojov.
- Citlivé, náročné alebo obmedzené oblasti.
- Zdvihy z jedného pobrežného plavidla na druhé.
- Pokračovanie zdvíhacích operácií s rôznymi ľuďmi.
- Zdvíhanie stroja bez zdvíhacích bodov.
- V podmienkach prostredia, ktoré môžu mať vplyv na výkon zariadenia.
- Bremono s neznámym / ťažko určiteľnou hmotnosťou a / alebo ťažiskom.
- Neštandardné usporiadanie vybavenia.
- Spustenie alebo zdvihnutie bremena zo stiesneného priestoru.
- Hmotnosť bremena presahujúca 75% menovitého zaťaženia podľa tabuľky zaťaženia.

Poznámka: nerutinné zdvíhacie operácie vyžadujú vyššie zmienené faktory na to, aby boli považované za nerutinné ale tento zoznam nie je úplný [2].

## 2 ZÁKLADNÉ POJMY STATIKY

### 2.1 POJEM SILY

Pojem sily bol vytvorený abstrakciou človeka, ktorý námahou svojich svalov musel prekonať tiaž a odpor pri premiestňovaní telies. Sila vzniká vzájomným pôsobením hmotných telies. Je prejavom hmoty, príčinou zmeny pohybového stavu čo do veľkosti a smeru, príčinou deformácie. Sila je veličina, ktorá charakterizuje prenášanie pohybu [3]. Jednotkou sily je N (newton) alebo jeho násobky, najčastejšie kN ( $10^3$  N), MN ( $10^6$  N).

Sila je vektor a preto na jej úplné (jednoznačné) určenie treba poznať štyri charakteristiky:

- **Pôsobisko** – miesto, v ktorom sila bezprostredne pôsobí.
- **Smer** – t. j. priamka (trajektória bodu), v ktorej sa sila môže pohybovať.
- **Zmysel** – orientácia smeru na priamke (znamienko +, -, grafická šípka).
- **Veľkosť** – množstvo silových jednotiek [3].

### 2.2 STATICKÝ MOMENT SILY

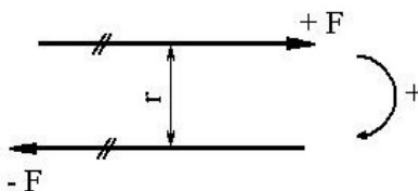
Pod statickým momentom sily sa rozumie jej očakávaný účinok okolo bodu (momentového stredy). Matematicky sa tento účinok sily vyjadruje rovnicou:

$$M = F \cdot r \quad (2.1)$$

Rovnica 2.1 sa číta takto: Statický moment sily **M** sa rovná súčinu sily **F** a kolmej vzdialenosti (ramena) **r** od zvoleného momentového stredy **S**. Môže byť kladný alebo záporný [3]. Jednotkou momentu sily je Nm (newton meter) alebo jeho násobky.

### 2.3 SILOVÁ DVOJICA

O silovú dvojicu ide len vtedy, keď v rovine pôsobia dve rovnako veľké a navzájom rovnobežné sily, ktoré majú opačný zmysel (obr. 2.1) [3]. Silová dvojica je osobitný prípad dvoch rovnobežných síl opačného zmyslu a charakterizuje sa takto: Silová dvojica nemá spoločné pôsobisko, nemožno ju nahradiť jednou výslednou silou – nemá výslednicu a tým ani posuvný účinok. Má iba otáčavý účinok – má moment a preto nemôže byť v rovnováhe.



Obr. 2.1: Silová dvojica [3]

Veľkosť otáčavého účinku silovej dvojice je daná momentom  $M_d$ , ktorý sa rovná súčinu jednej sily a vzdialenosti **r** medzi oboma silami.

$$M_d = F \cdot r \quad (2.2)$$

### 3 ZÁKLADNÉ ZÁKONY, PRINCÍPY A AXIÓMY STATIKY

Základom klasickej mechaniky sú tri Newtonove zákony, ktoré boli vyslovené na základe nahromadených znalostí a výsledkov predchádzajúcich pokusov [4].

#### 3.1 NEWTONOVE ZÁKONY

##### 3.1.1 ZÁKON ZOTRVAČNOSTI

Každé teleso zotrúva v kľude alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe, pokiaľ nie je nútené tento stav meniť vplyvom vonkajších síl:

$$v = \text{konšt.}$$

ak

$$F = 0 \text{ [4]}$$

##### 3.1.2 ZÁKON SILY

Časová zmena hybnosti je úmerná pôsobiacej sile a deje sa v smere tejto sily:

$$H = m \cdot v$$

$$\frac{d(m \cdot v)}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot a = F \text{ [4]}$$

##### 3.1.3 ZÁKON AKCIE A REAKCIE

Dve telesá na seba pôsobia navzájom silami, ktoré sú rovnako veľké, ale opačného zmyslu (základný zákon statiky):

$$F = -F'$$

Kde  $F$  je akcia a  $F'$  je reakcia [4].

#### 3.2 PRINCÍP SUPERPOZÍCIE

Ak pôsobí na hmotný bod súčasne niekoľko síl (silová sústava  $F_i$ , kde  $i = 1, 2, \dots, n$ ), potom každá z týchto síl pôsobí nezávisle na druhej a udeľuje bodu zrýchlenie  $a_i = F_i / m$ .

Zrýchlenie udelené všetkými silami:

$$a = \sum_i a_i = \frac{1}{m} \cdot \sum_i F_i \text{ [4]}$$



### 3.3 ZÁKLADNÉ AXIÓMY

Všetky vety a rovnice v statice sú odvodené z niekoľkých axiém (základných princípov), ktoré nie sú matematicky dokazované. Axiómy statiky predstavujú všeobecné formulácie získané, ako výsledok množstva experimentov a pozorovaní [4].

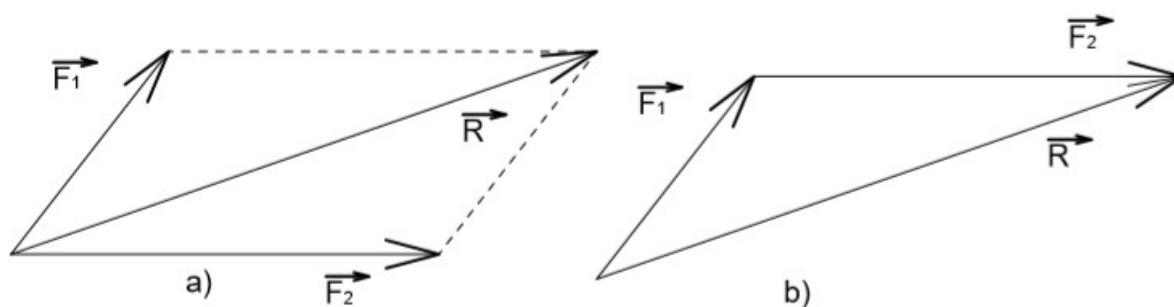
#### 3.3.1 AXIÓMA O ROVNOVÁHE DVOCH SÍL

Dve sily môžu byť v rovnováhe vtedy a len vtedy, ak sú rovnako veľké, opačného zmyslu a na spoločnej nositeľke. Z toho vyplýva, že účinok sily na tuhé teleso sa nezmení, ak sa posunie jej pôsobisko ľubovoľne po jej nositeľke [4].

#### 3.3.2 AXIÓMA O ROVNOBEŽNÍKU SÍL

Dve rôznobežné sily  $F_1$  a  $F_2$  pôsobiace na teleso v jednom bode, možno nahradiť jednou výslednicou  $R$ , pôsobiacou v tom istom bode. Jej veľkosť, smer a zmysel určuje uhlopriečka rovnobežníka, ktorého strany sú veľkosťami daných síl (obr. 3.1a).

Podľa obr. 1b môžeme namiesto rovnobežníka zostrojiť tzv. zložkový trojuholník. Je to graficky zobrazený vektorový súčet.



Obr. 3.1: Grafické zisťovanie výslednice  $R$  [4].

### 3.4 PODMIENKY ROVNOVÁHY SÍL V ROVINE

Ak pôsobí v rovine viac síl ako dve, ide o sústavu síl. Podmienky rovnováhy silových sústav možno vyjadriť analyticky alebo graficky.

Analytické podmienky rovnováhy síl:

$$\sum F_{ix} = \sum H_i = 0 \quad (3.1)$$

$$\sum F_{iy} = \sum V_i = 0 \quad (3.2)$$

$$\sum M_i = 0 \quad (3.3)$$

Prvé dve podmienky rovnováhy (3.1 a 3.2) sú súčtové. Keď sú splnené obidve súčtové podmienky, nenastane posuv ani vo vodorovnom, ani vo zvislom smere (horizontálne zložky  $F_{ix}$  alebo  $H_i$  a podobne zložky  $F_{iy}$  alebo  $V_i$  sa navzájom rušia). Ak je splnená aj tretia podmienka (3.3), že súčet momentov ku určitému bodu sa musí rovnať nule, otáčanie nenastane. Tretia podmienka je momentová podmienka rovnováhy.

Grafické podmienky rovnováhy síl:

- Aby nenastal posun ani vo vodorovnom, ani vo zvislom smere, musí byť zložková čiara uzavretá. Táto grafická podmienka rovnováhy nahrádza dve súčtové analytické podmienky rovnováhy (3.1 a 3.2).
- Aby nenastalo otáčanie, musí byť výslednicová čiara uzavretá. Táto grafická podmienka nahrádza tretiu momentovú podmienku rovnováhy (3.3).

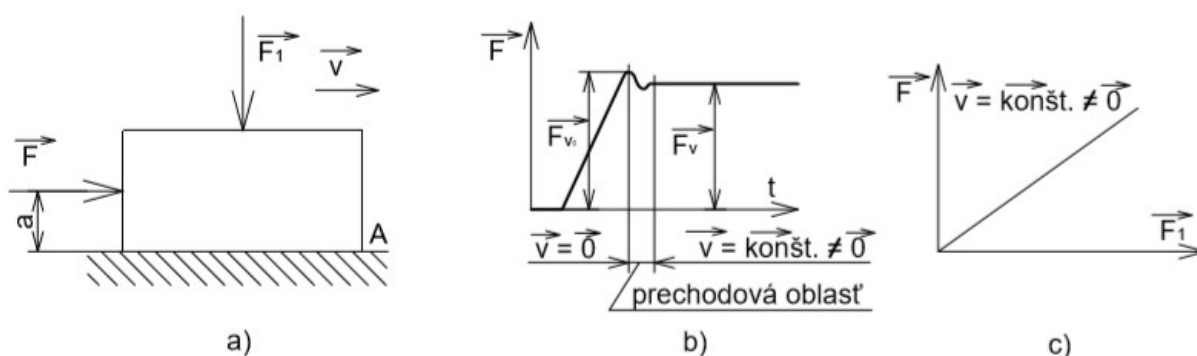
Dve sústavy síl sú navzájom ekvivalentné (rovnocenné), keď majú pri pôsobení na tuhé teleso rovnaký účinok a keď sa môžu navzájom nahrádzať. Rovnováha nastane vtedy, keď sa obráti zmysel všetkých síl jednej z oboch navzájom ekvivalentných sústav [3].

## 4 VÄZBY NNTP

Označenie NNTP je pre styk telies, ktorý sa vyznačuje:

- Nepriepustným stykom týchto telies.
- Nepremennosťou stykového útvaru, v stykovom útvaru (oblasti dotyku) vždy dochádza k deformácii, tá je ale z funkčného hľadiska malá.
- Tlakovým stykom, rozoberateľné spojenie dvoch telies.
- Pasívny styk, hranice pokojovej stability a strata energie sú významné a teda nezanedbateľné (Coulombovo suché trenie, suché valenie) [5].

### 4.1 EXPERIMENT S HRANOLOM



Obr. 4.1: Experiment s hranolom [5].

V prvej časti experimentu (usporiadanie experimentu je na obr. 4.1a) pri  $\vec{F}_1 = \overrightarrow{konšt.}$  (prítlačná sila)  $a = \text{konšt.}$  skúmame vplyv veľkosti hnacej sily  $F$  na pohyblivý stav telesa. Riadiacou veličinou je veľkosť sily  $\vec{F}$ , ktorú meníme tak, aby hranol prešiel z klúdu do rovnomerného priamočiareho pohybu. Časová závislosť a charakteristické stavy sú graficky znázornené na obr. 4.1b, z ktorého vyplýva, že pri rovnomernom priamočiarom pohybe je  $\vec{F}_v > \overrightarrow{konšt.}$ . Pri prechode hranola z pokoja do pohybu je potrebné pôsobiť silou  $\vec{F}_{v0} > \vec{F}_v$  - prechodová oblasť.

Teraz budeme experiment opakovať s rôznou hodnotou sily  $F_1$ , s cieľom určiť závislosť  $F_v > f(F_1)$ . Po vykonaní a vyhodnotení experimentu sme získali závislosť, ktorej grafické znázornenie je na obr. 4.1c, odkiaľ vyplýva  $F_v = \text{konšt.} \cdot F_1$  ( $F_v = F$  pri pohybe hranolu,  $\vec{v} = \overrightarrow{konšt.}$ ) [5].

Uvedený experiment je základom definície Coulombovského trenia. Z hľadiska vymedzenia Coulombovského trenia trecia sila nezávisí na veľkosti trecích plôch [5].

Súčiniteľ šmykového trenia významne závisí:

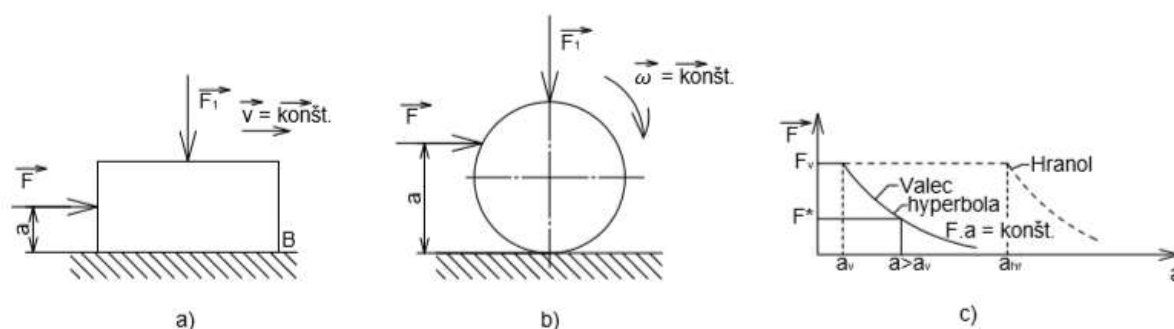
- Na akosti povrchu trecích plôch.
- Na materiáli trecích plôch.
- Na akosti mazania.
- Na teplote v mieste dotyku [5].

Hodnoty súčiniteľa šmykového trenia sú uvedené v tab. 1

Materiál telies	$f_0$	$f$
Oceľ na oceli	0,15	0,03 – 0,09
Oceľ na liatine	0,33	0,13 – 0,17
Oceľ na fosfátovom bronz	0,11	0,01
Tvrdé drevo na tvrdom dreve v smere vlákien	0,6	0,5
Naprieč vláknami	0,7	0,6

Tab. 1 [5].

## 4.2 EXPERIMENT S VALCOM A HRANOLOM



Obr. 4.2: experiment s valcom a hranolom

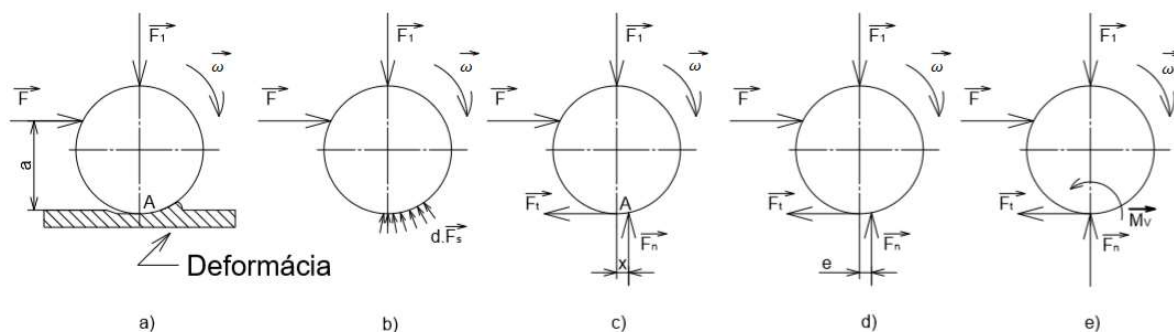
**Hranol** (obr. 4.2a). Najskôr predbežne zistíme vplyv parametru  $a$ . Ak zväčšujeme  $a$  pri konštantnej hodnote sily  $\vec{F}$ , potom pri dosadení určitej hodnoty nastane preklopenie hranola. Ak na hranol pôsobí sila  $\vec{F} = \vec{F}_v$ , tak hodnotu parametra  $a$ , pri ktorej sa hranol začne prevracat', označíme  $a_{hr}$  viz. obr. 4.2c. Ak je  $a \leq a_{hr}$  tak pri pôsobení  $\vec{F} < \vec{F}_v$  je hranol v pokoji. Ak neuvažujeme prechodovú oblasť a ak zväčšujeme  $\vec{F}$  na  $\vec{F}_v$ , tak sa hranol začne pohybovať rovnomerným pohybom, ak silu  $\vec{F}$  ďalej zväčšujeme, hranol sa pohybuje zrýchleným pohybom. Ak je hodnota parametra  $a = a_{hr}$ , tak hranol zostáva až do hodnoty  $\vec{F} = \vec{F}_v$  v pokoji, po jej dosiahnutí dochádza k preklopeniu hranola okolo bodu B a tým k zmene charakteru väzby. Ak je  $a > a_{hr}$ , tak k preklopeniu hranola dochádza pri  $\vec{F} > \vec{F}_v$ . Oblasť, v ktorej dochádza k preklopeniu hranola popisuje čiarkovaná krivka na obr. 4.2c [5].

**Valec** (obr. 4.2b). Pre „malé“ hodnoty parametra  $a$  ( $a < a_v$ ) a  $\vec{F} < \vec{F}_v$  je valec v pokoji. Ak  $\vec{F} = \vec{F}_v$  valec sa pohybuje šmykaním. Pre  $a > a_v$  je valec zo začiatku zaťažovaný v pokoji, ak sila  $\vec{F}$  dosiahne istej hodnoty  $\vec{F}^*$ , ktorá je menšia ako  $\vec{F}_v$  dochádza k valeniu valca.

Z vyhodnotenia experimentu zistíme, že závislosť  $\vec{F}^* - a$  pri valení je hyperbolická (viz obr. 4.2c) a platí:

$$F^* \cdot a = F \cdot \omega a = \text{konšt.} [5].$$

Pri valení dochádza k deformácii telies (valca a dosky) v mieste dotyku. Pre názornosť naznačíme iba deformáciu dosky, obr. 4.3a. Uvoľnenie väzby medzi valcom a doskou je znázornené na obr. 4.3b a pre výsledné silové pôsobenie na obr. 4.3c.



Obr. 4.3 [5].

Vzdialenosť nositeľky normálovej sily od bodu A nazývame ramenom valivého odporu a značíme ju  $e$ , pričom  $e = \text{konšt.}$  Nositeľka normálovej sily je posunutá vzhľadom k bodu A o rameno valivého odporu **proti pohybu telesa v mieste dotyku**. Uvoľnenie valca pri valení s uvažovaním výsledku experimentu je zobrazené na obr. 4.3d. Na obr. 4.3e je znázornené uvoľnenie v prípade, keď pôsobenie sily  $\vec{F}_n$  sme vyjadrili staticky ekvivalentným silovým pôsobením v bode A ( $\{F_n, M_v\}$ ).  $M_v$  nazývame momentom valivého odporu, ktorého zmysel musí byť vždy **oproti pohybu telesa v mieste dotyku**.

Veľkosť ramena valivého odporu závisí na materiáli dotýkajúcich sa telies. Orientačné hodnoty sú v nasledujúcej tabuľke.

Materiál telies	$e$ [mm]
Liatina na liatine	0,5
Oceľ na oceli	0,5
Drevo na kameni	1,5
Tvrde drevo na tvrdom dreve	0,5

Tab. 2 [5].

Ak je z hľadiska riešeného problému podstatné silové pôsobenie v smere geometricky možného pohybu, tak pre dotyk musíme použiť model NNTP a silové pôsobenie v dotyku významne závisí na charaktere pohybu [5].

### 4.3 POSTUP PRI RIEŠENÍ SÚSTAV TELIES

- Označenie telies (vrátane základného) a väzieb, zakreslenie smerov rýchlostí ( $\vec{V}$ ,  $\vec{\omega}$ ),
- Kinematický rozbor,

$$i = (n - 1) \cdot i_v - \left( \sum \xi_i - \eta \right) - k \cdot \delta$$

kde  $i$  je počet stupňov voľnosti sústavy telies (ak je  $i > 0$  ide o pohyblivé uloženie),  
 $n$  je počet telies,  
 $i_v$  je počet stupňov voľnosti voľného telesa ( $3^\circ$  voľnosti v 2D a  $6^\circ$  voľnosti v 3D),  
 $\sum \xi_i$  je počet stupňov voľnosti, ktoré odoberajú väzby,  
 $\eta$  je počet stupňov voľnosti, ktoré odoberajú deformačné členy,  
 $k$  je počet degenerovaných členov,  
 $\delta$  je počet stupňov voľnosti, ktoré odoberá degenerovaný člen (v 2D je to  $1^\circ$  voľnosti).

- Uvoľnenie telies (okrem základného),
- Určovanie neznámych parametrov (NP), závislých parametrov (ZP) a Stykových závislostí (SZ),
- Statický rozbor (podmienky statickej určitosti),

$$\mu = \nu \wedge \mu_M + \mu_R \leq \nu_M$$

kde:  $\mu$  je počet neznámych parametrov,  
 $\nu$  je počet rovníc (použitelných podmienok statickej rovnováhy)

$$\nu = \nu_M + \nu_F$$

$\mu_M$  je počet momentových neznámych parametrov,  
 $\mu_R$  je počet polohových neznámych parametrov,  
 $\nu_M$  je počet momentových rovníc,  
 $\nu_F$  je počet silových rovníc.

- Zostavenie rovníc rovnováhy,
- Kontrola funkčnosti väzieb.

## 5 ZÁKLADNÉ POJMY DYNAMIKY

### 5.1 HMOTNÝ BOD

Jedná sa o model reálneho objektu, u ktorého predpokladáme sústredenie hmoty telesa c všetkých pôsobiacich síl do jedného bodu. Nezvažujeme teda priestorové usporiadanie reálneho objektu.

Hmotný bod má z hľadiska pohybového stavu 3 stupne voľnosti – translácia vo všetkých súradnicových smeroch (translácia v troch na seba kolmých smeroch). Nezvažuje sa rotácia okolo seba samého, hmotný bod môže rotovať okolo iného bodu [6].

### 5.2 HYBNOSŤ HMOTNÉHO BODU

Hybnosť telesa je vektorová fyzikálna veličina definovaná ako súčin hmotnosti a okamžitej rýchlosti hmotného bodu [6]:

$$\vec{H} = m \cdot \vec{v}$$

kde  $m$  je hmotnosť hmotného bodu a  $\vec{v}$  je vektor okamžitej rýchlosti hmotného bodu.

Smer vektora hybnosti je totožný so smerom vektora okamžitej rýchlosti  $\vec{v}$ . Hybnosť charakterizuje pohybový stav telesa v danej vzťažnej sústave [6].

### 5.3 MOMENT HYBNOSTI

Moment hybnosti je vektorová veličina popisujúca otáčavý pohyb telesa voči bodu či osi. V klasickej mechanike tuhých telies je vektor momentu hybnosti definovaný vzťahom [7]:

$$\vec{b}_O = \vec{R} \times \vec{H}$$

kde  $\vec{R}$  je polohový vektor vzťahnutý k stredu otáčania  $O$ , teda platí:

$$\vec{b}_O = \vec{R} \times m \cdot \vec{v}$$

## 5.4 METÓDY POČÍTANIA

### 5.4.1 METÓDA UVOĽŇOVANIA

Táto metóda prevádza vyšetrowanie pohybu sústavy telies na riešenie pohybu jednotlivých telies. Ide o univerzálnu metódu, umožňujúcu celkové dynamické riešenie mechanickej sústavy. K pohybovým rovniciam je spravidla ešte nutné pripojiť kinematické rovnice a rovnice väzieb, tak aby počet rovníc bol rovný počtu neznámych. Ak sa podarí pomocou týchto vzťahov vylúčiť všetky závislé veličiny bude v pohybových rovniciach mechanickej sústavy s  $n$  stupňami voľnosti  $n$  nezávislých súradníc. Vylúčením všetkých väzbových síl obdržíme pohybové rovnice udávajúce závislosti medzi vnútornými (akčnými) silami a parametrami pohybu. Týmto rovniciam hovoríme **vlastné pohybové rovnice** [8].

### 5.4.2 METÓDA REDUKCIE

Základnou metódou vyšetrovania pohybu je metóda uvoľňovania. Táto metóda je príliš práčna, nakoľko v nej vystupujú všetky neznáme vnútorné sily sústavy a preto ju nahrádzame v prípadoch, kedy chceme získať vlastnú pohybovú rovnicu, metódou redukcie. Názov metódy vznikol z poznatku, že pre sústavu s jedným stupňom voľnosti možno napísať vlastnú pohybovú rovnicu v tvare zhodnom s pohybovou rovnicou jedného telesa, na ktoré boli redukované všetky hmotnostné a silové charakteristiky sústavy. Ide teda o nahradenie skutočnej sústavy sústavou jednoduchšou, ktorá má všetky dynamické vlastnosti zhodné so sústavou pôvodnou. Pri redukcii by sme mohli vychádzať aj z metódy uvoľňovania a z vlastnej pohybovej rovnice odvodiť redukované veličiny. Tým by však riešenie nebolo jednoduchšie. Pri určovaní redukovaných hodnôt vychádzame preto z rovnosti kinetických energií skutočnej a redukovanej sústavy.

$$E_{k,red} = E_{k,skut}$$

A z rovnosti prác, alebo výkonností skutočnej a redukovanej sústavy:

$$A_{red} = A_{skut}$$

$$P_{red} = P_{skut}$$

V prípade, že všetky pôsobiace sily sú konzervatívne, možno vychádzať z rovnosti potenciálnych energií skutočnej a redukovanej sústavy:

$$E_{p,red} = E_{p,skut}$$

Metóda redukcie svojou podstatou patrí do mechaniky skalárnej, pretože vychádza zo skalárnych veličín  $E_k$ ,  $A$ ,  $P$  alebo  $E_p$ .

Metóda je výhodná predovšetkým pre riešenie sústav, u ktorých neuvažujeme pasívne odpory [8].

### 5.4.3 LAGRANGEOVE ROVNICE DRUHÉHO DRUHU

Lagrangeove rovnice II. druhu predstavujú v súčasnej dobe najpoužívanjšiu metódu analytickej mechaniky pri zostavovaní pohybových rovníc pre modelové telesá a predovšetkým pre modelové sústavy telies. Metodický postup pri zostavovaní pohybových rovníc je nezávislý na voľbe súradnicového systému, čo je nespornou výhodou. Ďalšou výhodou je, že jedinými dynamickými veličinami, ktoré je nutné vyjadriť, sú kinematická energia a potenciálna energia (pri konzervatívnych sústavách) [8].

Obvyklý tvar rovníc je formulovaný pre holonomné väzby a nezávislé zovšeobecnené súradnice. Tak sú už dopredu vylúčené väzobné sily, čo je výhodné predovšetkým pre zložité modelové sústavy. Pre modelové sústavy s neholonomnými väzbami lineárnymi v rýchlostiach sa používa tzv. Lagrangeových rovníc s multiplikátormi. Počet stupňov voľnosti budeme označovať  $n$ , počet holonomných väzieb  $h$ , prípadne počet neholonomných väzieb  $r$ . Potom bude celkový počet zovšeobecnených súradníc  $n+h+r$  [8].



Lagrangeovu rovnici druhého druhu je možné uviesť v tvare:

$$\frac{d}{dt} \cdot \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial A}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_i}$$

kde:  $E_k$  je kinetická energia sústavy,

$E_p$  je potenciálna energia sústavy,

$E_D$  je disipatívna energia sústavy,

$A$  je práca vonkajších síl,

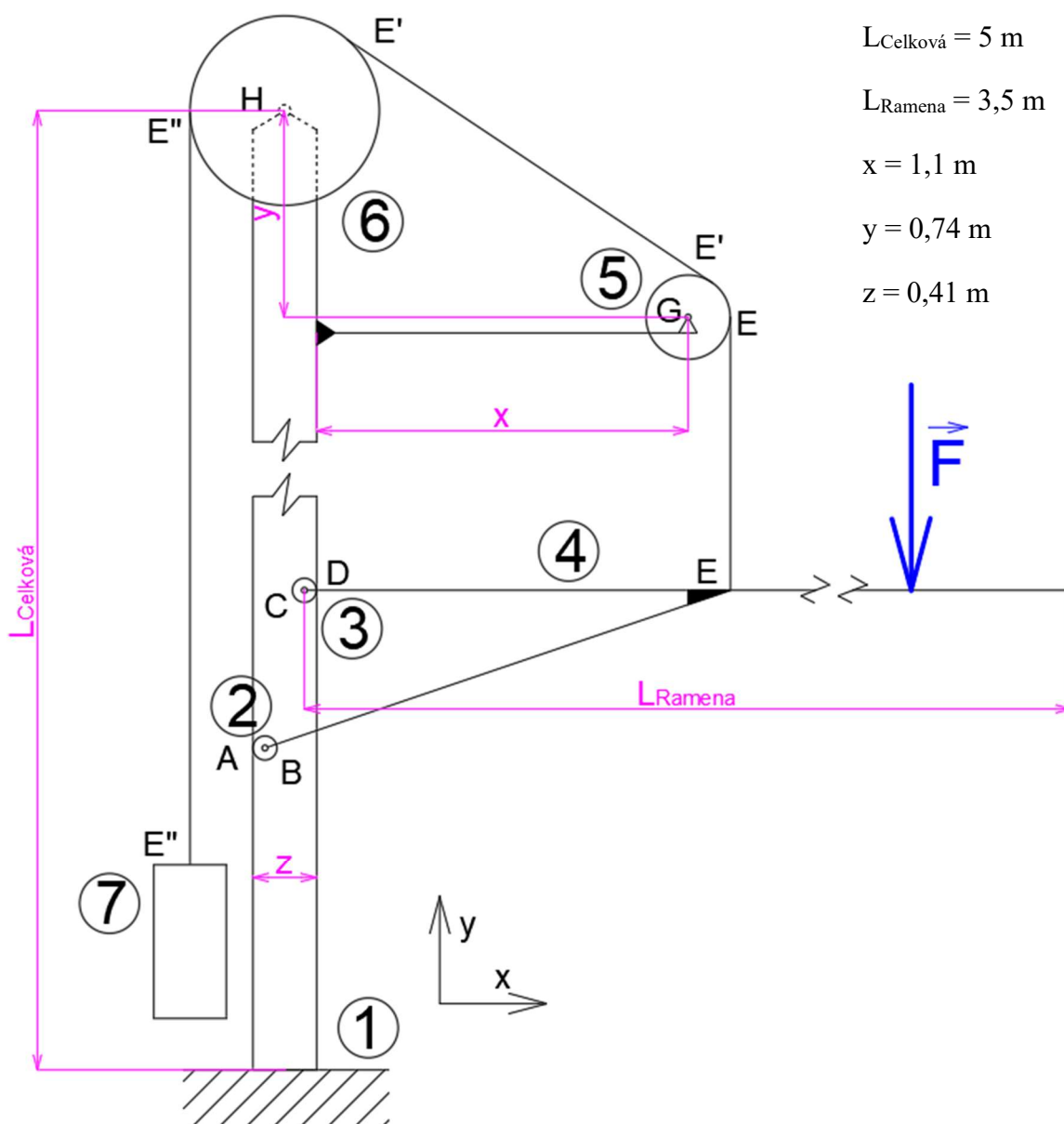
$W$  je výkon vonkajších síl.

Pozn.: Gravitačná sila  $\vec{F}_G$  – možno ju do pohybových rovníc zahrnúť dvomi spôsobmi. Buď vo forme potenciálnej energie alebo ako silu vonkajšiu a tým do práce alebo do výkonu. Je však nutné, aby bola zahrnutá jedným alebo druhým spôsobom, každopádne nie oboma, inak sa navzájom odčíta.

## 6 ZDVIŽNÉ ZARIADENIE - STATIKA

### 6.1 ZADANIE A ROZBOR

Zdvižné zariadenie (výtah) sa používa vo výrobnej hale na zdvíhanie osobných automobilov na konci procesu výroby. Podľa hmotnosti zdvíhaného automobilu je nutné správne spočítať veľkosť hnacieho momentu, ktorý je potrebný pre zdvih, resp. výkon motora výtahu, aby sa zdvíhaná plošina pohybovala konštantnou, nenulovou rýchlosťou. K tomu potrebujeme vedieť veľkosti stykových síl. Zadanie budeme riešiť ako 2D úlohu a volíme karteziánsky súradnicový systém. Výtah sa pohybuje pomaly, môžeme teda zanedbať vplyv zotrvačných síl, ďalej budeme zanedbávať aj odporové sily, s prihliadnutím na nedeformovateľnosť telies môžeme použiť model väzieb NNTP. Uvažujeme tiažové pole Zeme ( $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ). Na obr. 6.1 je schéma tohto výtahu s označením jednotlivých telies a väzieb a s voľbou súradnicového systému. Zaťaženie od automobilu je nahradené silou  $F$ .



Obr. 6.1: schéma výtahu.

## 6.2 RIEŠENIE SÚSTAVY TELIES PRE ZDVIH BREMENA HORE

### 6.2.1 KINEMATICKÝ ROZBOR

Počet stupňov voľnosti viazanej sústavy telies ( $i_s$ ) je rovný rozdielu počtu stupňov voľnosti od všetkých telies sústavy (ich súčet), okrem základného telesa ( $(n - 1) \cdot i_v$ ) a počtu stupňov voľnosti, ktoré odoberajú väzby ( $\xi_i$ ), bez počtu stupňov voľnosti, ktoré odoberú deformačné členy ( $\eta$ ).

$$i_s = (n - 1) \cdot i_v - \left( \sum \xi_i - \eta \right)$$

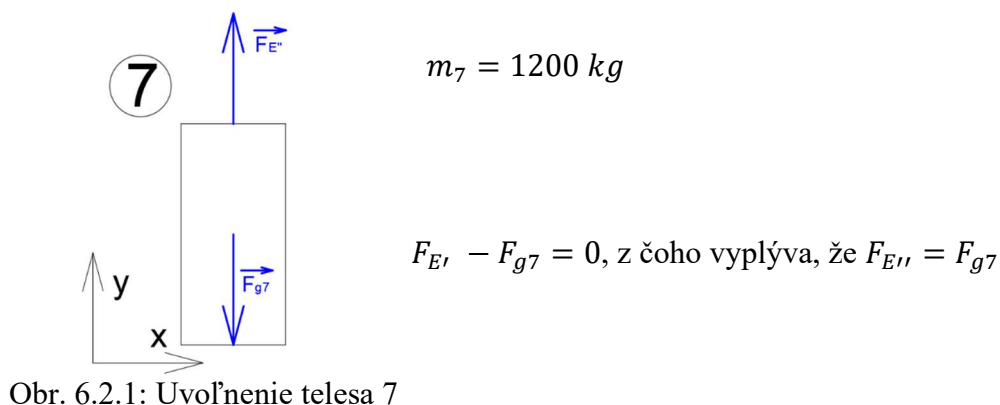
$(n - 1)$  počet telies bez základného telesa

$i_v$  počet stupňov voľnosti voľného telesa

$\sum \xi_i$  suma stupňov voľnosti odobrané väzbami

Kvôli tomu, že riešime 2D úlohu všetky telesá sústavy majú 3 stupne voľnosti.  $i_v = 6 \cdot 3 = 18^\circ$  voľnosti.

V tomto prípade nemusíme teleso 7 (protizávažie) brať do úvahy ako teleso ale ako silu na druhom konci lana, ktorá je rovná tiažovej sile telesa 7, podľa obr. 6.1.1.



Obr. 6.2.1: Uvoľnenie telesa 7

Hmotnosť protizávažia sa volí ako polovica zdvíhaného bremena (aby mal motor stále približne rovnakú záťaž pri chode zariadenia s bremenom/naprázdno) v tejto práci však zo začiatku nebudeme uvažovať stavy bez zdvíhaného bremena, preto  $m_7 = m = 1200 \text{ kg}$

Keď odrátame teleso 1 a teleso 7, ostáva nám 5 telies, teda:

$$i_v = 5 \cdot 3 = \mathbf{15^\circ \text{ voľnosti}}$$

V ďalšom postupe budeme uvažovať už iba druhú variantu a sústava má tým pádom  $15^\circ$  voľnosti.

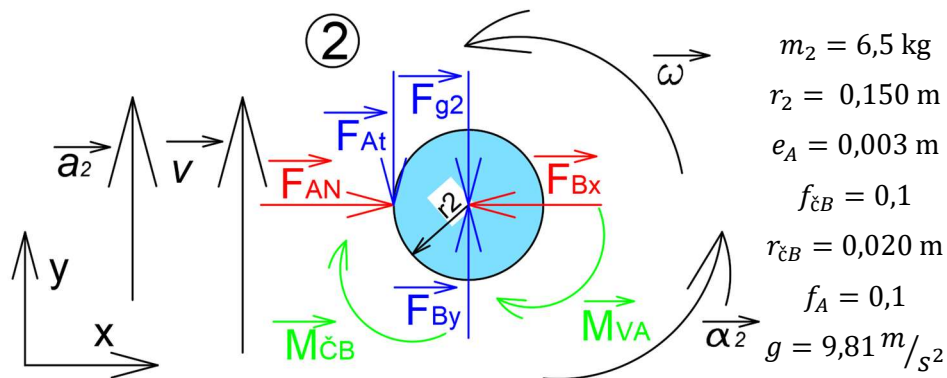
Posuvné väzby A a D odoberajú  $2^\circ$  voľnosti rovnako ako rotačné väzby B, C, G a H a väzba lanom E, teda  $\sum \xi_i = 7 \cdot 2 = \mathbf{14^\circ \text{ voľnosti}}$ .

Deformačné členy sa v tejto sústave nenachádzajú, teda  $\mu = 0$ . Počet stupňov voľnosti je teda  $i = 15 - 14 = 1^\circ$  voľnosti. **Ide teda o pohyblivé uloženie.**

### 6.2.2 UVOĽNENIE TELIES

Pri uvoľňovaní telies je potrebné vyznačiť smer ich pohybu z pohľadu pasívnych účinkov, ktoré vo väzbách vždy pôsobia proti smeru pohybu (relatívneho). V prípade podmieneného pôsobenia síl vo väzbách vždy uvoľňujeme sily tak, aby väzby boli funkčné. Smer ostatných síl môžeme voliť ľubovoľne pri dodržaní základných pravidiel ako sú napríklad, že dotyčnicové sily sú kolmé k normálovým alebo dodržanie zákona o akcii a reakcii, teda ak je sila uvoľnená na prvom telese zvoleným smerom, na druhom telese budeme mať smer opačný. Sily, ktoré pri výpočte vyjdú záporné (tj. so záporným znamienkom) sú uvoľnené opačným smerom.

Teleso 2:



Obr. 6.2.2: uvoľnenie telesa 2

**Keďže ide o statický pohyb, všetky zrýchlenia sú rovné nule.**

Rovnice rovnováhy:  $F_{AN} - F_{Bx} = 0$

$$F_{By} - F_{g2} - F_{At} = m_2 \cdot a_2$$

$$F_{At} \cdot r_2 - M_{VA} - M_{\check{c}B} = I_{O2} \cdot \alpha_2 \text{ (momentová rovnica k bodu B)}$$

Stykové závislosti:  $M_{VA} = F_{AN} \cdot e_A$  (moment valenia)

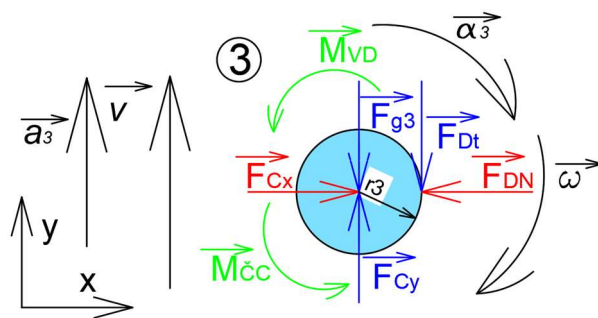
$$M_{\check{c}B} = r_{\check{c}B} \cdot \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} \cdot f_{\check{c}B}. \text{ (moment čapového trenia)}$$

Pri riešení budeme používať Poncetovu linearizáciu pre čapové trenie na počítanie týchto rovníc. Podľa nich môžeme veľkosť stykovej výslednice  $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$  približne určiť pomocou lineárneho vzťahu  $F \cong 0,96 \cdot F_x + 0,4 \cdot F_y$  (pri  $F_x > F_y$ ) resp. vzťahu  $F \cong 0,96 \cdot F_y + 0,4 \cdot F_x$  pri ( $F_y > F_x$ ). Relatívna odchýlka pri určení veľkosti sily nepresiahne hodnotu 4% [9].

Styková závislosť momentu čapového trenia prepíšeme na:

$$M_{\check{c}B} \cong r_{\check{c}B} \cdot (0,96 \cdot F_{Bx} + 0,4 \cdot F_{By}) \cdot f_{\check{c}B} \text{ (za predpokladu } F_{Bx} > F_{By} \text{)}.$$

Teleso 3:



$$\begin{aligned} m_3 &= 6,5 \text{ kg} \\ r_3 &= 0,150 \text{ m} \\ e_D &= 0,003 \text{ m} \\ f_{cc} &= 0,1 \\ r_{cc} &= 0,020 \text{ m} \\ f_D &= 0,1 \\ g &= 9,81 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Obr. 6.2.3: uvoľnenie telesa 3

**Keďže ide o statický pohyb, všetky zrýchlenia sú rovné nule.**

Rovnice rovnováhy:  $F_{Cx} - F_{DN} = 0$

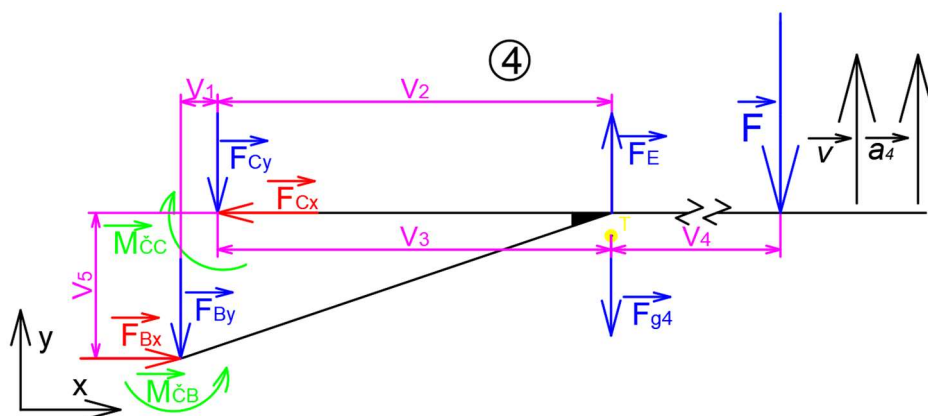
$$F_{Cy} - F_{g3} - F_{Dt} = m_3 \cdot a_3$$

$$-F_{Dt} \cdot r_3 + M_{VD} + M_{cc} = I_{o3} \cdot \alpha_3 \quad (\text{momentová rovnica k bodu C})$$

Stykové závislosti:  $M_{VD} = F_{DN} \cdot e_D$  (moment valenia)

$M_{cc} = r_{cc} \cdot (0,96 \cdot F_{Cx} + 0,4 \cdot F_{Cy}) \cdot f_{cc}$  (moment čapového trenia po Ponceltovej linearizácii pre čapové trenie, za predpokladu  $F_{Cx} > F_{Cy}$ ).

Teleso 4:



$$\begin{aligned} V_1 &= 0,130 \text{ m} \\ V_2 &= 1,280 \text{ m} \\ V_3 &= 1,400 \text{ m} \\ V_4 &= 1,700 \text{ m} \\ V_5 &= 0,520 \text{ m} \\ m_4 &= 1000 \text{ kg} \\ m_{zav.} &= 1200 \text{ kg} \\ g &= 9,81 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Obr. 6.2.4: uvoľnenie telesa 4

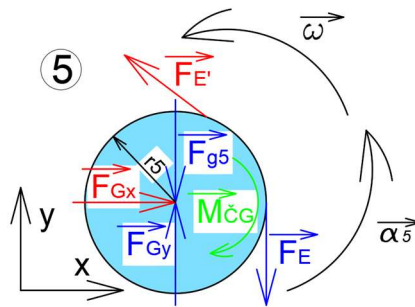
**Keďže ide o statický pohyb, zrýchlenie telesa 4 je rovné nule.**

Rovnice rovnováhy:  $F_{Bx} - F_{Cx} = 0$

$$F_E - F_{g4} - F_{By} - F_{Cy} - F = m_4 \cdot a_4$$

$F_{Bx} \cdot V_5 + F_{By} \cdot V_1 + F_E \cdot V_2 - F_{g4} \cdot V_3 - F \cdot (V_3 + V_4) + M_{CB} - M_{cc} = 0$  (momentová rovnica k bodu C).

Teleso 5:



$$\begin{aligned} m_5 &= 75 \text{ kg} \\ r_5 &= 0,200 \text{ m} \\ f_{\check{c}G} &= 0,1 \\ r_{\check{c}G} &= 0,030 \text{ m} \\ g &= 9,81 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Obr. 6.2.5: uvoľnenie telesa 5

**Keďže ide o statický pohyb, uhlové zrýchlenie telesa je rovné nule.**

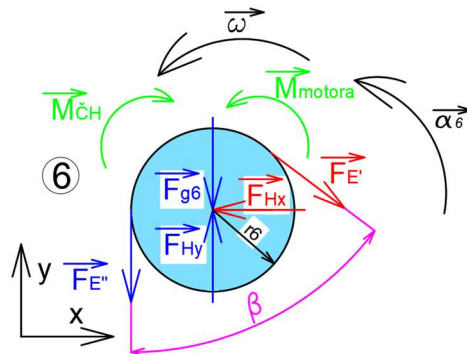
Rovnice rovnováhy:  $F_{Gx} - F_{E'} \cdot \cos(90 - \beta) = 0$

$$F_{Gy} - F_{g5} - F_E + F_{E'} \cdot \sin(90 - \beta) = 0$$

$$F_{E'} \cdot r_5 - F_E \cdot r_5 - M_{\check{c}G} = I_{o5} \cdot \alpha_5 \text{ (momentová rovnica k bodu G).}$$

Stykové závislosti:  $M_{\check{c}G} = r_{\check{c}G} \cdot (0,96 \cdot F_{Gx} + 0,4 \cdot F_{Gy}) \cdot f_{\check{c}G}$  (moment čapového trenia po Poncetovej linearizácii pre čapové trenie, za predpokladu  $F_{Gx} > F_{Gy}$ ).

Teleso 6:



$$\begin{aligned} m_6 &= 280 \text{ kg} \\ r_6 &= 0,300 \text{ m} \\ f_{\check{c}H} &= 0,1 \\ r_{\check{c}H} &= 0,030 \text{ m} \\ \beta &= 55,35^\circ \\ g &= 9,81 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Obr. 6.2.6: uvoľnenie telesa 6

**Keďže ide o statický pohyb, uhlové zrýchlenie telesa je rovné nule.**

Uhol  $\beta$  vypočítame z rovnice:  $\tan \beta = \frac{x+r_5+z/2}{y+r_6} \Rightarrow \beta = \tan^{-1} \left( \frac{x+r_5+z/2}{y+r_6} \right)$ .

Rovnice rovnováhy:  $F_{E'} \cdot \sin(\beta) - F_{Hx} = 0$

$$F_{Hy} - F_{g6} - F_{E''} - F_{E'} \cdot \cos(\beta) = 0$$

$$F_{E'} \cdot r_6 - F_{E''} \cdot r_6 - M_{\check{c}H} + M_{motora} = I_{o6} \cdot \alpha_6 \text{ (momentová rovnica k bodu H).}$$

Stykové závislosti:  $M_{\check{c}H} = r_{\check{c}H} \cdot (0,96 \cdot F_{Hx} + 0,4 \cdot F_{Hy}) \cdot f_{\check{c}H}$  (moment čapového trenia po Poncetovej linearizácii pre čapové trenie, za predpokladu  $F_{Hx} > F_{Hy}$ ).

### 6.2.3 OZNAČENIE ZNÁMYCH, NEZNÁMYCH A ZÁVISLÝCH PARAMETROV

Množina známych parametrov:

$$\{F_{g2}, F_{g3}, F_{g4}, F, F_{g5}, F_{g6}, F_{E''}\}$$

Množina neznámych parametrov:

$$\{F_{AN}, F_{Bx}, F_{By}, F_{At}, F_{Cx}, F_{Cy}, F_{DN}, F_{Dt}, F_E, F_{Gx}, F_{E'}, F_{Gy}, F_{Hx}, F_{Hy}, M_{motora}\}$$

Množina závislých parametrov:

$$\{M_{\zeta B}, M_{VA}, M_{VD}, M_{\zeta C}, M_{\zeta G}, M_{\zeta H}\}$$

(stykové závislosti sú rozpísané pri uvoľnení jednotlivých telies)

### 6.2.4 STATICKÝ ROZBOR

Aby bola úloha staticky určitá, musí byť počet neznámych parametrov (značíme ako  $\mu$ ) rovný počtu rovníc (počtu použiteľných podmienok statickej rovnováhy, značíme ako  $\nu$ ) a zároveň súčet momentových ( $\mu_M$ ) a polohových ( $\mu_R$ ) neznámych parametrov nesmie byť väčší ako počet momentových rovníc ( $\nu_M$ ).

$$\begin{aligned}\mu &= \nu \wedge \mu_M + \mu_R \leq \nu_M \\ 15 &= 15 \wedge 1 \leq 5\end{aligned}$$

Sústava je staticky určitá a je možné ju riešiť.

### 6.2.5 RIEŠENIE SÚSTAVY ROVNÍC

V kapitole 6.2.2 máme pri každom uvoľnenom telese napísané rovnice rovnováhy a stykové závislosti, tieto rovnice prepíšeme do maticového zápisu a vypočítame vo výpočtovom programe (v tomto prípade použijeme program MATLAB). Rovnice prepíšeme to trochu matíc a dostaneme rovnicu v tvare:  $\mathbb{A} \cdot \mathbb{x} = \mathbb{b}$ , kde matica  $\mathbb{x}$  je matica neznámych parametrov, matica  $\mathbb{b}$  je matica známych (zadaných) parametrov a matica  $\mathbb{A}$  je matica známych (zadaných) konštánt neznámych parametrov. Maticu neznámych parametrov vypočítame tak, že rovnicu vynásobíme zľava inverznou maticou k matici  $\mathbb{A}$  (maticou  $\mathbb{A}^{-1}$ ), teda:

$$\mathbb{x} = \mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{b}.$$

Matica  $\mathbb{X}$ :

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} F_{AN} \\ F_{Bx} \\ F_{By} \\ F_{At} \\ F_{Cx} \\ F_{Cy} \\ F_{DN} \\ F_{Dt} \\ F_E \\ F_{Gx} \\ F_{E'} \\ F_{Gy} \\ F_{Hx} \\ F_{Hy} \\ M_{motora} \end{pmatrix}$$

Matica  $\mathbb{b}$ :

$$\mathbb{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_{g2} \\ 0 \\ 0 \\ F_{g3} \\ 0 \\ 0 \\ F + F_{g4} \\ F_{g4} \cdot (V_3) + F \cdot (V_3 + V_4) \\ 0 \\ F_{g5} \\ 0 \\ 0 \\ F_{E''} + F_{g6} \\ -F_{E'} \cdot r_6 \end{pmatrix}$$

Matica  $\mathbb{A}$ :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e_A & -0,96 \cdot r_{EB} \cdot f_{EB} & -0,4 \cdot r_{EB} \cdot f_{EB} & r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,96 \cdot r_{EB} \cdot f_{EB} + V_5 & 0,4 \cdot r_{EB} \cdot f_{EB} + V_1 & 0 & 0 & -0,96 \cdot r_{EC} \cdot f_{EC} & -0,4 \cdot r_{EC} \cdot f_{EC} & 0 & 0 & V_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_5 & -0,96 \cdot r_{EG} \cdot f_{EG} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Po spuštění výpočtového programu dostávame riešenie:

Parameter	Hodnota	Jednotky
$F_{AN}$	33,16	kN
$F_{Bx}$	33,16	kN
$F_{By}$	0,5580	kN
$F_{At}$	0,4940	kN
$F_{Cx}$	33,16	kN
$F_{Cy}$	0,5580	kN
$F_{DN}$	33,16	kN
$F_{Dt}$	0,4940	kN
$F_E$	22,70	kN
$F_{Gx}$	11,00	kN
$F_{E'}$	22,88	kN
$F_{Gy}$	3,374	kN
$F_{Hx}$	18,82	kN
$F_{Hy}$	27,52	kN
$M_{motora}$	3,418	kN · m

### 6.2.6 KONTROLA FUNKČNOSTI VÄZIEB

**Stykové väzby:** Väzby A a D sa musia dotýkať základného telesa na to, aby boli funkčné, teda normálové sily v týchto väzbách musia byť väčšie ako nula:

$F_{AN} > 0 \wedge F_{DN} > 0$ . Z výsledkov vidíme, že väzby A a D sú funkčné (prenášajú tlakové zaťaženie).

**Lanové väzby:** Všetky laná musia byť natáhané, aby prenášali zaťaženie, teda všetky sily v lanách musia byť väčšie ako nula:

$F_E > 0 \wedge F_{E'} > 0 \wedge F_{E''} > 0$ . Z výsledkov vidíme, že väzby E, E' a E'' sú funkčné.

**Valivé väzby:** Dotyčnicová (tečná) sila musí byť menšia ako trecia sila, inak sa teleso nevalí ale šmýka:

$$F_{AT} = F_{AN} \cdot f_A = 33,16 \cdot 0,1 = 3,316 \text{ kN} \Rightarrow F_{AT} > F_{At}$$

$$F_{DT} = F_{DN} \cdot f_D = 33,16 \cdot 0,1 = 3,316 \text{ kN} \Rightarrow F_{DT} > F_{Dt} \text{ v oboch väzbách dochádza k valeniu.}$$

### 6.2.7 ZHODNOTENIE

Z výsledkov vidíme, že x-ové zložky síl v rotačných väzbách sú väčšie ako y-ové (predpoklad pre Ponceletovu linearizáciu pre čapové trenie) a že všetky väzby sú funkčné. Zo statickej rovnováhy telesa 4 (obr. 6.2.4 na strane 29) je jasné, že sily  $F_{Bx}$  a  $F_{Cx}$  musia mať rovnakú veľkosť a na obrázkoch 6.2.2 a 6.2.3 (strany 28 a 29) vidíme, že sily  $F_{AN}$  a  $F_{DN}$  musia mať taktiež tú istú veľkosť. Rovnosť síl  $F_{By}$  a  $F_{Cy}$  je pravdepodobne spôsobená tým, že telesá 2 a 3 sú z rovnakého materiálu a majú rovnaké rozmery a preto sily  $F_{g2}$  a  $F_{g3}$  sú tiež rovnako veľké. Z rovností týchto síl vyplýva aj rovnosť síl  $F_{At}$  a  $F_{Dt}$ . Z obrázkov 6.2.2 a 6.2.3 vidíme tiež, že sila  $F_{At}$  je závislá iba na silách  $F_{By}$  a  $F_{g2}$  a sila  $F_{Dt}$  je závislá iba na silách  $F_{Cy}$  a  $F_{g3}$ .

V prílohe č. 1 na strane 58 máme lineárne závislosti hnacieho momentu a sily  $F_{AN}$  na rozmere  $x$ , vidíme, že so zväčšujúcou sa vzdialenosťou klesá hnací moment a taktiež sila  $F_{AN}$ , ako sme už písali sila  $F_{AN}$  má rovnakú veľkosť ako sily  $F_{DN}$ ,  $F_{Bx}$  a  $F_{Cx}$ , teda rastúci rozmer  $x$  priaznivo vplýva aj na  $M_{motora}$ , aj na sily pôsobiace na valivé kolieska, je však nutné prihliadnuť na skutočnosť, že pri dostatočne veľkom rozmere  $x$  by väzby A a D mohli prestať byť funkčné.

Príloha č. 2 na strane 59 znázorňuje kvadratické závislosti na pasívnych účinkoch, konkrétne na hodnotách  $e_A$  a  $e_D$  (hodnoty ramena valivého odporu medzi polyamidom PA - 6 GO a oceľou). Vidíme, že so zvyšujúcim sa valivým odporom kvadraticky rastie hnací moment (čím väčší odpor, tým väčšia hnacia silová dvojica) a kvadraticky klesá sila  $F_{AN}$  (tak isto aj  $F_{DN}$ ,  $F_{Bx}$  a  $F_{Cx}$ ) a na konci výpočtov je sila menšia viac ako o polovicu. Zato sila  $F_{By}$  vzrástla skoro až 7-násobne. Podobne aj ostatné veľkosti síl sústavy rastú. Zaťaženie sa teda prenáša z x-ových zložiek síl, pôsobiacich na valivé kolieska, do zvyšku celej sústavy. Je treba brať do úvahy, že hodnoty ramena valivého odporu v rádoch desiatok milimetrov sú veľmi nereálne a použité sú iba kvôli názornosti grafu.

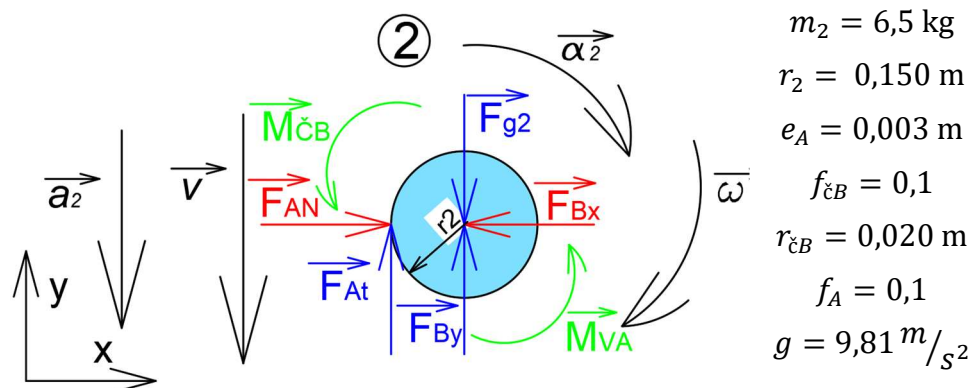
## 6.3 RIEŠENIE SÚSTAVY TELIES PRE SPÚŠŤANIE BREMENA DOLE

### 6.3.1 KINEMATICKÝ ROZBOR

Kinematický rozbor je zhodný s kinematickým rozborom pre zdvih hore v kapitole 6.2.1. Sústava má jeden stupeň voľnosti, teda ide o pohybové uloženie.

### 6.3.2 UVOĽNENIE TELIES

Teleso 2:



Obr. 6.3.1: uvoľnenie telesa 2

**Keďže ide o statický pohyb, všetky zrýchlenia sú rovné nule.**

Rovnice rovnováhy:  $F_{AN} - F_{Bx} = 0$

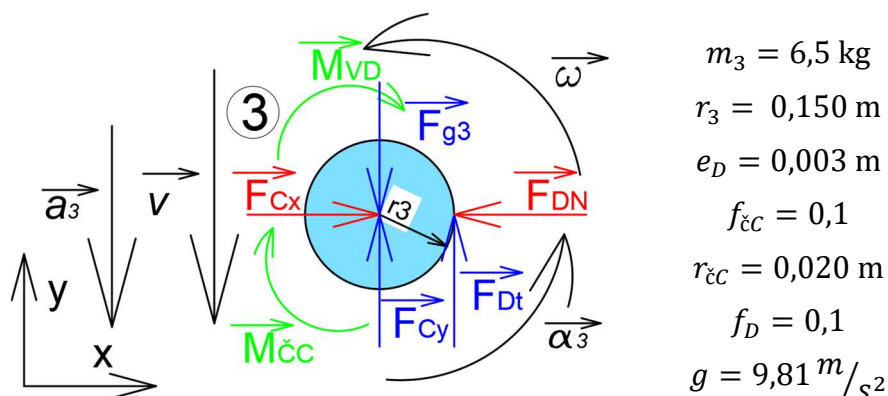
$$F_{By} - F_{g2} + F_{At} = m_2 \cdot a_2$$

$$M_{VA} + M_{\check{c}B} - F_{At} \cdot r_2 = I_{O2} \cdot \alpha_2 \quad (\text{momentová rovnica k bodu B})$$

Stykové závislosti:  $M_{VA} = F_{AN} \cdot e_A$  (moment valenia)

$M_{\check{c}B} = r_{\check{c}B} \cdot (0,96 \cdot F_{Bx} + 0,4 \cdot F_{By}) \cdot f_{\check{c}B}$  (moment čapového trenia po Ponceletovej linearizácii pre čapové trenie, za predpokladu  $F_{Bx} > F_{By}$ ).

Teleso 3:



Obr. 6.3.2: uvoľnenie telesa 3

**Keďže ide o statický pohyb, všetky zrýchlenia sú rovné nule.**

Rovnice rovnováhy:  $F_{Cx} - F_{DN} = 0$

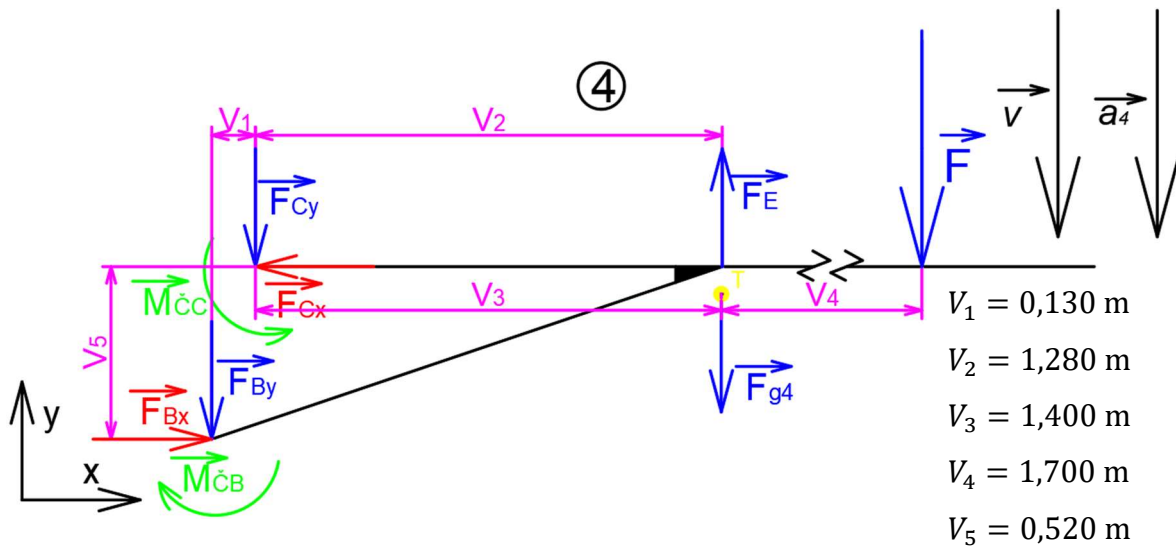
$$F_{Cy} - F_{g3} + F_{Dt} = m_3 \cdot a_3$$

$$F_{Dt} \cdot r_3 - M_{VD} - M_{\check{c}C} = I_{o3} \cdot \alpha_3 \quad (\text{momentová rovnica k bodu C})$$

Stykové závislosti:  $M_{VD} = F_{DN} \cdot e_D$  (moment valenia)

$M_{\check{c}C} = r_{\check{c}C} \cdot (0,96 \cdot F_{Cx} + 0,4 \cdot F_{Cy}) \cdot f_{\check{c}C}$  (moment čapového trenia po Ponceletovej linearizácii pre čapové trenie, za predpokladu  $F_{Cx} > F_{Cy}$ ).

Teleso 4:



Obr. 6.3.3: uvoľnenie telesa 4

$$V_1 = 0,130 \text{ m}$$

$$V_2 = 1,280 \text{ m}$$

$$V_3 = 1,400 \text{ m}$$

$$V_4 = 1,700 \text{ m}$$

$$V_5 = 0,520 \text{ m}$$

$$m_4 = 1000 \text{ kg}$$

$$m_{zav.} = 1200 \text{ kg}$$

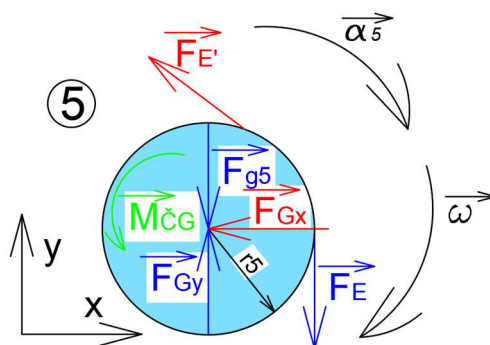
**Keďže ide o statický pohyb, zrýchlenie telesa 4 je rovné nule.**

Rovnice rovnováhy:  $F_{Bx} - F_{Cx} = 0$

$$F_E - F_{g4} - F_{By} - F_{Cy} - F = m_4 \cdot a_4$$

$F_{Bx} \cdot V_5 + F_{By} \cdot V_1 + F_E \cdot V_2 - F_{g4} \cdot V_3 - F \cdot (V_3 + V_4) - M_{\check{c}B} + M_{\check{c}C} = 0$  (momentová rovnica k bodu C).

Teleso 5:



$$\begin{aligned} m_5 &= 75 \text{ kg} \\ r_5 &= 0,200 \text{ m} \\ f_{\check{c}G} &= 0,1 \\ r_{\check{c}G} &= 0,030 \text{ m} \\ g &= 9,81 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Obr. 6.3.4: uvoľnenie telesa 5

**Keďže ide o statický pohyb, uhlové zrýchlenie telesa je rovné nule.**

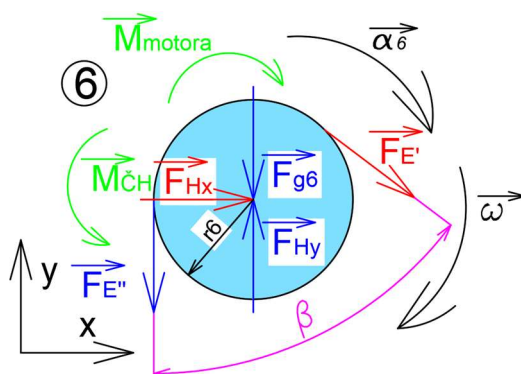
Rovnice rovnováhy:  $F_{Gx} - F_{E'} \cdot \cos(90 - \beta) = 0$

$$F_{Gy} - F_{g5} - F_E + F_{E'} \cdot \sin(90 - \beta) = 0$$

$$F_{E'} \cdot r_5 - F_E \cdot r_5 + M_{\check{c}G} = I_{o5} \cdot \alpha_5 \text{ (momentová rovnica k bodu G).}$$

Stykové závislosti:  $M_{\check{c}G} = r_{\check{c}G} \cdot (0,96 \cdot F_{Gx} + 0,4 \cdot F_{Gy}) \cdot f_{\check{c}G}$  (moment čapového trenia po Ponceltovej linearizácii pre čapové trenie, za predpokladu  $F_{Gx} > F_{Gy}$ ).

Teleso 6:



$$\begin{aligned} m_6 &= 280 \text{ kg} \\ r_6 &= 0,300 \text{ m} \\ f_{\check{c}H} &= 0,1 \\ r_{\check{c}H} &= 0,030 \text{ m} \\ \beta &= 84,94^\circ \\ g &= 9,81 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Obr. 6.3.5: uvoľnenie telesa 6

**Keďže ide o statický pohyb, uhlové zrýchlenie telesa je rovné nule.**

Rovnice rovnováhy:  $F_{E'} \cdot \sin(\beta) - F_{Hx} = 0$

$$F_{Hy} - F_{g6} - F_{E''} - F_{E'} \cdot \cos(\beta) = 0$$

$$F_{E''} \cdot r_6 - F_{E'} \cdot r_6 - M_{\check{c}H} + M_{motora} = I_{o6} \cdot \alpha_6 \text{ (momentová rovnica k bodu H).}$$

Stykové závislosti:  $M_{\check{c}H} = r_{\check{c}H} \cdot (0,96 \cdot F_{Hx} + 0,4 \cdot F_{Hy}) \cdot f_{\check{c}H}$  (moment čapového trenia po Ponceltovej linearizácii pre čapové trenie, za predpokladu  $F_{Hx} > F_{Hy}$ ).

### 6.3.3 OZNAČENIE ZNÁMYCH, NEZNÁMYCH A ZÁVISLÝCH PARAMETROV

Množina známych parametrov:

$$\{F_{g2}, F_{g3}, F_{g4}, F, F_{g5}, F_{g6}, F_{E''}\}$$

Množina neznámych parametrov:

$$\{F_{AN}, F_{Bx}, F_{By}, F_{At}, F_{Cx}, F_{Cy}, F_{DN}, F_{Dt}, F_E, F_{Gx}, F_{E'}, F_{Gy}, F_{Hx}, F_{Hy}, M_{motora}\}$$

Množina závislých parametrov:

$$\{M_{\check{C}B}, M_{VA}, M_{VD}, M_{\check{C}C}, M_{\check{C}G}, M_{\check{C}H}\}$$

(stykové závislosti sú rozpísané pri uvoľnení jednotlivých telies)

### 6.3.4 STATICKÝ ROZBOR

Statický rozbor je zhodný so statickým rozborom v kapitole 6.2.4. Sústava je staticky určitá a je možné ju riešiť.

### 6.3.5 RIEŠENIE SÚSTAVY ROVNÍC

Sústavu rovníc budeme riešiť rovnako ako v kapitole 6.2.5, teda:  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$ .

Matica  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} F_{AN} \\ F_{Bx} \\ F_{By} \\ F_{At} \\ F_{Cx} \\ F_{Cy} \\ F_{DN} \\ F_{Dt} \\ F_E \\ F_{Gx} \\ F_{E'} \\ F_{Gy} \\ F_{Hx} \\ F_{Hy} \\ M_{motora} \end{pmatrix}$$

Matica  $\mathbb{b}$ :

$$\mathbb{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_{g2} \\ 0 \\ 0 \\ F_{g3} \\ 0 \\ 0 \\ F + F_{g4} \\ F_{g4} \cdot (V_3) + F \cdot (V_3 + V_4) \\ 0 \\ F_{g5} \\ 0 \\ 0 \\ F_{E''} + F_{g6} \\ -F_{E''} \cdot r_6 \end{pmatrix}$$

Matica  $\mathbb{A}$ :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_A & 0,96 \cdot r_{EB} \cdot f_{EB} & 0,4 \cdot r_{EB} \cdot f_{EB} & -r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,96 \cdot r_{EC} \cdot f_{EC} & -0,4 \cdot r_{EC} \cdot f_{EC} & -e_D & r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,96 \cdot r_{EB} \cdot f_{EB} + V_5 & -0,4 \cdot r_{EB} \cdot f_{EB} + V_1 & 0 & 0 & 0,96 \cdot r_{EC} \cdot f_{EC} & 0,4 \cdot r_{EC} \cdot f_{EC} & 0 & 0 & V_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Po spuštění výpočtového programu dostáváme řešení:

Parameter	Hodnota	Jednotky
$F_{AN}$	39,42	kN
$F_{Bx}$	39,42	kN
$F_{By}$	-0,5170	kN
$F_{At}$	0,5810	kN
$F_{Cx}$	39,42	kN
$F_{Cy}$	-0,5170	kN
$F_{DN}$	39,42	kN
$F_{Dt}$	0,5810	kN
$F_E$	20,55	kN
$F_{Gx}$	9,801	kN
$F_{E'}$	20,39	kN
$F_{Gy}$	3,408	kN
$F_{Hx}$	16,77	kN
$F_{Hy}$	26,11	kN
$M_{motora}$	-2,505	kN · m

### 6.3.6 KONTROLA FUNKČNOSTI VÄZIEB

#### *Stykové väzby:*

$F_{AN} > 0 \wedge F_{DN} > 0$ . Z výsledkov vidíme, že väzby A a D sú funkčné.

#### *Lanové väzby:*

$F_E > 0 \wedge F_{E'} > 0 \wedge F_{E''} > 0$ . Z výsledkov vidíme, že väzby E, E' a E'' sú funkčné.

#### *Valivé väzby:*

$$F_{AT} = F_{AN} \cdot f_A = 39,42 \cdot 0,1 = 3,942 \text{ kN} \Rightarrow F_{AT} > F_{At}$$

$$F_{DT} = F_{DN} \cdot f_D = 39,42 \cdot 0,1 = 3,942 \text{ kN} \Rightarrow F_{DT} > F_{Dt} \text{ v oboch väzbách dochádza k valeniu}$$

### 6.3.7 ZHODNOTENIE

Z výsledkov vidíme, že x-ové zložky síl v rotačných väzbách sú väčšie ako y-ové (Predpoklad pre Ponceletovu linearizáciu pre čapové trenie). Vidíme tiež, že sily  $F_{By}$  a  $F_{Cy}$  a hnací moment  $M_{motora}$  vyšli záporne, v tomto prípade nejde o chybu ale znamená to, že sily (a moment) pôsobia opačným smerom ako sú uvoľnené. Hnací moment musí mať rovnakú orientáciu ako hnací moment pri zdvíhaní bremena. Motor teda nebude poháňať spúšťanie bremena, iba brzdiť jeho pád. Takisto ako pri zdvihu bremena vyšli z rovnakého dôvodu sily  $F_{Bx}$ ,  $F_{Cx}$ ,  $F_{AN}$  a  $F_{DN}$  rovnako veľké, ako aj sily  $F_{By}$  a  $F_{Cy}$  a sily  $F_{At}$  a  $F_{Dt}$  vyšli rovnako veľké kvôli tomu, že telesá 2 a 3 sú totožné. V porovnaní s výsledkami pre zdvih hore v tabuľke na strane 33 sa zvýšili sily pôsobiace na valivé kolieska (väzby A, B, C a D) a znížili sa sily v lane, taktiež hnací moment motora  $M_{motora}$  je nižší. Sily v rotačných väzbách G a H sa taktiež mierne znížili.

Príloha č. 3 na strane 60 znázorňuje závislosť hnacieho momentu motora a sily  $F_{AN}$  na rozmere x. Pri pozeraní na prvý graf (závislosť  $M_{motora}$ ) musíme pamätať na to, že hnací moment vychádza záporne budeme sa teda pozerat' na absolútne hodnoty výsledkov. Takže hnací moment lineárne rastie a sila  $F_{AN}$  (a teda aj sily  $F_{Bx}$ ,  $F_{Cx}$  a  $F_{DN}$ ) lineárne klesá. Tu zväčšujúci sa rozmer x už nie je tak priaznivý ako pri zdvíhaní bremena hore.

Z grafov v prílohe č. 4 na strane 61 (alebo v detaile týchto grafov v prílohe č. 5 na strane 62) vidíme, že hodnoty ramena valivého odporu nemôžeme voliť také nereálne, v okolí hodnoty 25 mm (0,025 m) sila  $F_{AN}$  (a teda aj sily  $F_{Bx}$ ,  $F_{Cx}$  a  $F_{DN}$ ) mení znamienko na záporné a väzby A a D prestávajú byť funkčné, všetky ostatné výsledky od toho momentu už nie sú správne. Na výsledky sa môžeme spoľahnúť do hodnoty ramena valivého odporu  $e_A = 0,0228 \text{ m}$  (vyčítané z grafov v prílohe č. 5), dotedy hnací moment aj sila  $F_{AN}$  kvadraticky rastú.



## 7 ZDVIŽNÉ ZARIADENIE - DYNAMIKA

### 7.1 ZADANIE A ROZBOR

Zadanie (a rozbor) je rovnaké ako v kapitole 6.1 s tým rozdielom, že zdvíhaná plošina sa nebude pohybovať konštantnou rýchlosťou ale bude sa pohybovať so zrýchlením.

### 7.2 RIEŠENIE SÚSTAVY TELIES PRE ZDVIH BREMENA HORE

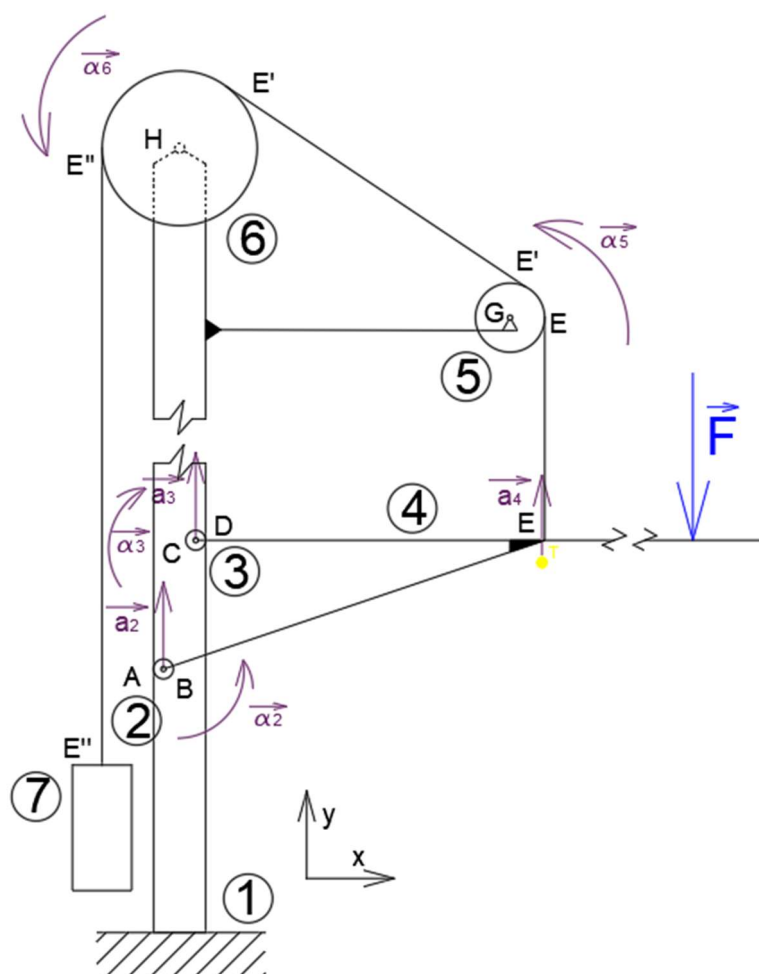
#### 7.2.1 KINEMATICKÝ ROZBOR

Počet telies je rovnaký ako v kapitole 6 a väzby sa nemenia, teda kinematický rozbor sa nelíši od kinematického rozboru v kapitole 6.2.1.

#### 7.2.2 UVOĽNENIE TELIES

Uvoľnenie telies, rovnice rovnováhy a stykové závislosti sú rovnaké ako v kapitole 6.2.2 s tým rozdielom, že zrýchlenia už nie sú nulové, to znamená, že musíme pridať rovnice kinematických väzieb. Všetky zrýchlenia budú závislé na zrýchlení zdvíhanej plošiny ( $a_4$ ), pretože to bude pravdepodobne najnázornejšie.

Rovnice kinematických väzieb:



$$\begin{aligned} a_4 &= a_2 \\ a_4 &= a_3 \\ a_2 &= \alpha_2 \cdot r_2 \\ a_3 &= \alpha_3 \cdot r_3 \\ a_4 &= \alpha_5 \cdot r_5 \\ a_4 &= \alpha_6 \cdot r_6 \end{aligned}$$

Obr. 7.1: Sústava telies - zrýchlenia

### 7.2.3 OZNAČENIE ZNÁMYCH, NEZNÁMYCH A ZÁVISLÝCH PARAMETROV

Množina známych parametrov:

$$\{a_4, F_{g2}, F_{g3}, F_{g4}, F, F_{g5}, F_{g6}, F_{E''}\}$$

Množina neznámych parametrov:

$$\{a_2, \alpha_2, a_3, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, F_{AN}, F_{Bx}, F_{By}, F_{At}, F_{Cx}, F_{Cy}, F_{DN}, F_{Dt}, F_E, F_{Gx}, F_{E'}, F_{Gy}, F_{Hx}, F_{Hy}, M_{motora}\}$$

Množina závislých parametrov:

$$\{M_{\check{C}B}, M_{VA}, M_{VD}, M_{\check{C}C}, M_{\check{C}G}, M_{\check{C}H}\}$$

### 7.2.4 STATICKÝ ROZBOR

$$\mu = v \wedge \mu_M + \mu_R \leq v_M$$

$$21 = 21 \wedge 1 \leq 5$$

Sústava je staticky určitá a je možné ju riešiť.

### 7.2.5 RIEŠENIE SÚSTAVY ROVNÍC

Sústavu rovníc budeme riešiť rovnako ako v kapitole 6.2.5, teda:  $\mathbb{x} = \mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{b}$ .

Matica  $\mathbb{x}$ :

$$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} F_{AN} \\ F_{Bx} \\ F_{By} \\ F_{At} \\ F_{Cx} \\ F_{Cy} \\ F_{DN} \\ F_{Dt} \\ F_E \\ F_{Gx} \\ F_{E'} \\ F_{Gy} \\ F_{Hx} \\ F_{Hy} \\ M_{motora} \\ a_2 \\ \alpha_2 \\ a_3 \\ \alpha_3 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix}$$

Matica  $\mathbb{b}$ :

$$\mathbb{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_{g2} \\ 0 \\ 0 \\ F_{g3} \\ 0 \\ 0 \\ m_4 \cdot a_4 + m \cdot (g + a_4) + F_{g4} \\ F_{g4} \cdot (V_3) + m \cdot (g + a_4) \cdot (V_3 + V_4) \\ 0 \\ F_{g5} \\ 0 \\ 0 \\ F_{E''} + F_{g6} \\ -F_{E''} \cdot r_6 \\ a_4 \\ a_4 \\ 0 \\ 0 \\ a_4 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

Matica  $\mathbb{A}$ :

Kvůli velikosti matice si zavedieme substitúcie:  $0,96 \cdot r_{\check{c}} \cdot f_{\check{c}} = \mathbf{s}$  a  $0,4 \cdot r_{\check{c}} \cdot f_{\check{c}} = \mathbf{p}$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e_A & -s_B & -p_B & r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_C & p_C & e_D & -r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_B + V_5 & p_B + V_1 & 0 & -s_C & -p_C & 0 & 0 & V_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\cos(90 - \beta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \sin(90 - \beta) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_5 & -p_G & r_5 & -s_G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\beta) & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\beta) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_6 & 0 & -p_H & -s_H & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_{o6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Po spuštění výpočtového programu dostávame riešenie:

Parameter	Hodnota	Jednotky
$F_{AN}$	34,06	kN
$F_{Bx}$	34,06	kN
$F_{By}$	0,5810	kN
$F_{At}$	0,5100	kN
$F_{Cx}$	34,06	kN
$F_{Cy}$	0,5740	kN
$F_{DN}$	34,06	kN
$F_{Dt}$	0,5040	kN
$F_E$	24,94	kN
$F_{Gx}$	12,10	kN
$F_{E'}$	25,17	kN
$F_{Gy}$	3,602	kN
$F_{Hx}$	20,71	kN
$F_{Hy}$	28,83	kN
$M_{motora}$	4,156	kN · m
$a_2$	1,000	$\text{m/s}^2$
$\alpha_2$	6,667	$\text{rad/s}^2$
$a_3$	1,000	$\text{m/s}^2$
$\alpha_3$	6,667	$\text{rad/s}^2$
$\alpha_5$	5,000	$\text{rad/s}^2$
$\alpha_6$	3,333	$\text{rad/s}^2$

### 7.2.6 KONTROLA FUNKČNOSTI VÄZIEB

**Stykové väzby:**

$F_{AN} > 0 \wedge F_{DN} > 0$ . Z výsledkov vidíme, že väzby A a D sú funkčné.

**Lanové väzby:**

$F_E > 0 \wedge F_{E'} > 0 \wedge F_{E''} > 0$ . Z výsledkov vidíme, že väzby E, E' a E'' sú funkčné.

**Valivé väzby:**

$$F_{AT} = F_{AN} \cdot f_A = 34,06 \cdot 0,1 = 3,406 \text{ kN} \Rightarrow F_{AT} > F_{At}$$

$F_{DT} = F_{DN} \cdot f_D = 34,06 \cdot 0,1 = 3,406 \text{ kN} \Rightarrow F_{DT} > F_{Dt}$  v oboch väzbách dochádza k valeniu.

### 7.2.7 ZHODNOTENIE

Z výsledkov vidíme, že x-ové zložky síl v rotačných väzbách sú väčšie ako y-ové (Predpoklad pre Ponceletovu linearizáciu pre čapové trenie) a že všetky väzby sú funkčné. Rovnako ako v predošlých prípadoch majú sily  $F_{Bx}$ ,  $F_{Cx}$ ,  $F_{AN}$  a  $F_{DN}$  rovnakú veľkosť z rovnakého dôvodu. Nakoľko sily  $F_{By}$  a  $F_{Cy}$  s malým rozdielom (iba 7 N) už nemajú rovnakú veľkosť ako pri statickom zdvihu hore a statickom spúšťaní dolu, môžeme predpokladať, že tomu tak je práve kvôli zrýchleniu s ktorým sa sústava pohybuje. V porovnaní so statickým zdvihom bremena a s výsledkami v tabuľke na strane 33 sa zvýšili sily v lane ( $F_E$  a  $F_{E'}$ ), tiež sily v rotačných väzbách G a H a hnací moment  $M_{motora}$ . Sily pôsobiace na valivé kolieska sa taktiež mierne zvýšili. Zvýšili sa vlastne všetky sily, niektoré viac, niektoré menej.

V prílohách č. 6 a č. 7 na stranách 63 a 64 vidíme, že grafy zobrazujúce závislosť na rozmere  $x$  a na veľkosti ramena valivého odporu vyzerajú úplne rovnako ako grafy v prílohách č. 1 a č. 2 (grafy pre statický zdvih bremena hore). Pohybujeme sa samozrejme v iných výsledných hodnotách ale závery z týchto grafov sú rovnaké ako v závery v kapitole 6.2.7 na strane 34.

Príloha č. 8 na strane 65 znázorňuje závislosť hnacieho momentu na zrýchlení telesa 4 (teda plošiny, na ktorej leží zdvíhané bremeno). Hnací moment rastie lineárne.

## 7.3 RIEŠENIE SÚSTAVY TELIES PRE SPÚŠŤANIE BREMENA DOLE

### 7.3.1 KINEMATICKÝ ROZBOR

Kinematický rozbor sa je rovnaký ako kinematický rozbor v kapitole 6.2.1. Sústava má jeden stupeň voľnosti, ide o pohybové uloženie.

### 7.3.2 UVOĽNENIE TELIES

Uvoľnenie telies, rovnice rovnováhy a stykové závislosti sú rovnaké ako v kapitole 6.2.2 s tým rozdielom, že zrýchlenia už nie sú nulové, to znamená, že musíme pridať rovnice kinematických väzieb, rovnaké ako v kapitole 7.2.2.

### 7.3.3 OZNAČENIE ZNÁMYCH, NEZNÁMYCH A ZÁVISLÝCH PARAMETROV

Označenie známych, neznámych a závislých parametrov je rovnaké ako v kapitole 7.2.3.

### 7.3.4 STATICKÝ ROZBOR

$$\mu = v \wedge \mu_M + \mu_R \leq v_M$$

$$21 = 21 \wedge 1 \leq 5$$

Sústava je staticky určitá a je možné ju riešiť.

### 7.3.5 RIEŠENIE SÚSTAVY ROVNÍC

Sústavu rovníc budeme riešiť rovnako ako v kapitole 6.2.5, teda:  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$ .

Matica  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} F_{AN} \\ F_{Bx} \\ F_{By} \\ F_{At} \\ F_{Cx} \\ F_{Cy} \\ F_{DN} \\ F_{Dt} \\ F_E \\ F_{Gx} \\ F_{E'} \\ F_{Gy} \\ F_{Hx} \\ F_{Hy} \\ M_{motora} \\ a_2 \\ \alpha_2 \\ a_3 \\ \alpha_3 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix}$$

Matica  $\mathbb{b}$ :

$$\mathbb{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_{g2} \\ 0 \\ 0 \\ F_{g3} \\ 0 \\ 0 \\ m_4 \cdot a_4 + m \cdot (g + a_4) + F_{g4} \\ F_{g4} \cdot (V_3) + m \cdot (g + a_4) \cdot (V_3 + V_4) \\ 0 \\ F_{g5} \\ 0 \\ 0 \\ F_{E'} + F_{g6} \\ -F_{E''} \cdot r_6 \\ a_4 \\ a_4 \\ 0 \\ 0 \\ a_4 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

Matica  $\mathbb{A}$ :

Kvůli velikosti matice si zavedieme substitúcie:  $0,96 \cdot r_{\check{c}} \cdot f_{\check{c}} = \mathbf{s}$  a  $0,4 \cdot r_{\check{c}} \cdot f_{\check{c}} = \mathbf{p}$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_A & s_B & p_B & -r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s_C & -p_C & -e_D & r_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s_B + V_5 & -p_B + V_1 & 0 & 0 & s_C & p_C & 0 & 0 & V_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\cos(90 - \beta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \sin(90 - \beta) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_5 & p_G & r_5 & s_G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_{o5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\beta) & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\beta) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r_6 & 0 & p_H & s_H - 1 & 0 & 0 & 0 & -I_{o6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_6 \end{pmatrix}$$

Po spuštění výpočtového programu dostávame riešenie:

Parameter	Hodnota	Jednotky
$F_{AN}$	40,50	kN
$F_{Bx}$	40,50	kN
$F_{By}$	-0,5230	kN
$F_{At}$	0,5930	kN
$F_{Cx}$	40,50	kN
$F_{Cy}$	-0,5930	kN
$F_{DN}$	40,50	kN
$F_{Dt}$	0,6000	kN
$F_E$	22,73	kN
$F_{Gx}$	10,86	kN
$F_{E'}$	22,59	kN
$F_{Gy}$	3,658	kN
$F_{Hx}$	18,58	kN
$F_{Hy}$	27,36	kN
$M_{motora}$	-3,201	kN · m
$a_2$	1,000	m/s <sup>2</sup>
$\alpha_2$	6,667	rad/s <sup>2</sup>
$a_3$	1,000	m/s <sup>2</sup>
$\alpha_3$	6,667	rad/s <sup>2</sup>
$\alpha_5$	5,000	rad/s <sup>2</sup>
$\alpha_6$	3,333	rad/s <sup>2</sup>

### 7.3.6 KONTROLA FUNKČNOSTI VÄZIEB

**Stykové väzby:**

$F_{AN} > 0 \wedge F_{DN} > 0$  z výsledkov vidíme, že väzby A a D sú funkčné.

**Lanové väzby:**

$F_E > 0 \wedge F_{E'} > 0 \wedge F_{E''} > 0$  z výsledkov vidíme, že väzby E, E' a E'' sú funkčné.

**Valivé väzby:**

$$F_{AT} = F_{AN} \cdot f_A = 40,50 \cdot 0,1 = 4,050 \text{ kN} \Rightarrow F_{AT} > F_{At}$$

$F_{DT} = F_{DN} \cdot f_D = 40,50 \cdot 0,1 = 4,050 \text{ kN} \Rightarrow F_{DT} > F_{Dt}$  v oboch väzbách dochádza k valeniu.



### 7.3.7 ZHODNOTENIE

Vypočítali sme hnací moment (silovú dvojicu) motora x-ové zložky síl v rotačných väzbách sú väčšie ako y-ové (Predpoklad pre Ponceletovu linearizáciu pre čapové trenie). Rovnako ako pri statickom spúšťaní bremana vidíme, že sily  $F_{By}$  a  $F_{Cy}$  a hnací moment  $M_{motora}$  vyšli záporne, sily (a moment) teda pôsobia opačným smerom. Motor nebude poháňať spúšťanie bremana ale bude brzdiť jeho pád. Všetky väzby sú funkčné. V porovnaní so statickým spúšťaním bremana a s výsledkami v tabuľke na strane 39 vzrástli sily v lane ( $F_E$  a  $F_{Er}$ ), sily v rotačných väzbách G a H a hnací moment motora  $M_{motora}$ . Sily pôsobiace na valivé kolieska taktiež vzrástli. Rovnako ako pri zdvihu hore, pri zrýchlenom pohybe všetky sily vzrástli.

Po vzhliadnutí všetkých výsledkov zistíme, že najväčšie zaťaženie na valivé kolieska je pri dynamickom spúšťaní bremana. Najnižší hnací moment je potrebný pri statickom spúšťaní bremana, naopak najvyšší hnací moment je potrebný pri dynamickom zdvíhaní bremana.

V prílohe č. 9 na strane 65 máme graf znázorňujúci závislosť hnacieho momentu na zrýchlení telesa 4 (teda plošiny, na ktorej je položené zdvíhané bremano). Absolútna hodnota hnacieho momentu lineárne rastie, znamená to, že motor musí viac zabráť, viac brzdiť pri väčšom zrýchlení spúšťania.

Prílohy č. 10, č. 11 na stranách 66 a 67 a jej detail v prílohe č. 12 na strane 68 vyzerajú opäť rovnako ako pri statickom pohybe. Závěry sa teda opäť nelíšia ako v zhodnotení na strane 40, rozdielne sú iba výsledné hodnoty. Pri závislosti na veľkosti ramena valivého odporu sa na výsledky môžeme opäť spoľahnúť do hodnoty  $e_A = 0,0234 m$ .

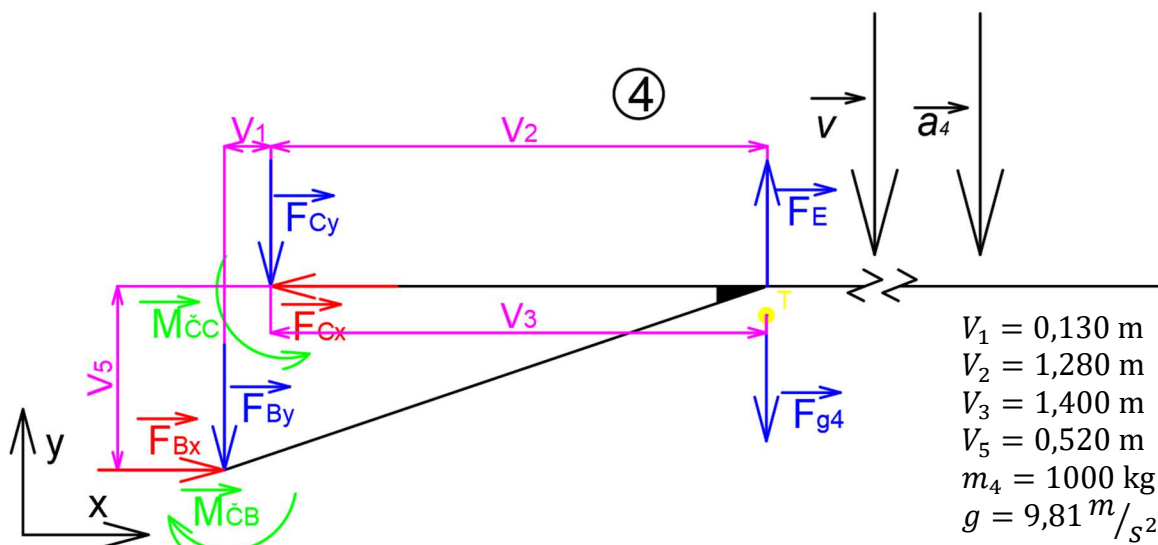
Z grafov v prílohách je vidieť, že teleso 5 na ramene o rozmere x má v sústave svoj zmysel, keďže jeho existencia znižuje veľkosť síl v sústave a veľkosť hnacieho momentu. Pri návrhu si treba dať pozor na veľkosť rozmeru x, aby neovplyvnil funkčnosť väzieb A a D. Tiež vidíme, že zväčšujúci sa odpor a zrýchlenie zvyšujú hnací moment motora.

## 8 SPÚŠŤANIE VÝŤAHU BEZ ZÁVAŽIA

Situácia je rovnaká ako v kapitole 6.1 na strane 26, akurát sila  $F$  od uvažovaného bremena už viac nebude pôsobiť na zdvižné zariadenie (konkrétne na teleso 4). V kapitole 6.2.1 na strane 27 sme uvažovali hmotnosť protizávažia  $m_7 = m$ , čo v tomto prípade zmení na  $m_7 = m/2$ . Keby zdvižné zariadenie bolo navrhnuté pre zdvíhanie/spúšťanie s, aj bez uvažovaného bremena pracovalo by uvažované zdvižné zariadenie vždy iba s polovicou váhy mysleného zdvíhaného bremena.

Riešenie je inak úplne zhodné ako pre spúšťanie výťahu so závažím v kapitole 6.3 (pre statický pohyb) a 7.3 (pre dynamický pohyb) s rozdielom pri uvoľňovaní telesa 4 (obr. 6.3.3), čo ovplyvní maticu známych parametrov  $\mathbb{b}$ .

Teleso 4:



Obr. 8.1: uvoľnenie telesa 4

**Pri statickom pohybe je zrýchlenie telesa 4 rovné nule.**

Rovnice rovnováhy:  $F_{Bx} - F_{Cx} = 0$

$$F_E - F_{g4} - F_{By} - F_{Cy} = m_4 \cdot a_4$$

$$F_{Bx} \cdot V_5 + F_{By} \cdot V_1 + F_E \cdot V_2 - F_{g4} \cdot V_3 - M_{\check{C}B} + M_{\check{C}C} = 0$$

(momentová rovnica k bodu C).

Matica  $\mathbb{b}$  pre pohyb bez zrýchlenia:

$$\mathbb{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_{g2} \\ 0 \\ 0 \\ F_{g3} \\ 0 \\ 0 \\ F_{g4} \\ F_{g4} \cdot (V_3) \\ 0 \\ F_{g5} \\ 0 \\ 0 \\ F_{E''} + F_{g6} \\ -F_{E''} \cdot r_6 \end{pmatrix}$$

Upravená matica  $\mathbb{b}$  pre zrýchlený pohyb:

$$\mathbb{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_{g2} \\ 0 \\ 0 \\ F_{g3} \\ 0 \\ 0 \\ m_4 \cdot a_4 + F_{g4} \\ F_{g4} \cdot (V_3) \\ 0 \\ F_{g5} \\ 0 \\ 0 \\ F_{E'} + F_{g6} \\ -F_{E''} \cdot r_6 \\ a_4 \\ a_4 \\ 0 \\ 0 \\ a_4 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

Dostáváme výsledky pre statický pohyb:

Parameter	Hodnota	Jednotky
$F_{AN}$	-1,436	kN
$F_{Bx}$	-1,436	kN
$F_{By}$	0,0850	kN
$F_{At}$	-0,0210	kN
$F_{Cx}$	-1,436	kN
$F_{Cy}$	0,0850	kN
$F_{DN}$	-1,436	kN
$F_{Dt}$	-0,0210	kN
$F_E$	9,979	kN
$F_{Gx}$	4,759	kN
$F_{E'}$	9,898	kN
$F_{Gy}$	2,035	kN
$F_{Hx}$	8,143	kN
$F_{Hy}$	14,26	kN
$M_{motora}$	-1,163	kN · m

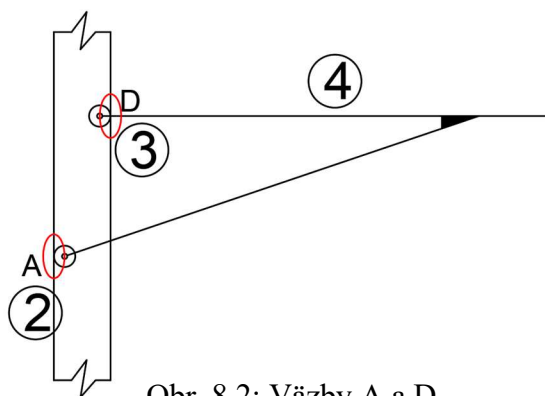
a pre dynamický pohyb:

Parameter	Hodnota	Jednotky
$F_{AN}$	-4,528	kN
$F_{Bx}$	-4,528	kN
$F_{By}$	0,1400	kN
$F_{At}$	-0,0700	kN
$F_{Cx}$	-4,528	kN
$F_{Cy}$	0,1330	kN
$F_{DN}$	-4,528	kN
$F_{Dt}$	-0,0630	kN
$F_E$	11,08	kN
$F_{Gx}$	5,303	kN
$F_{E'}$	11,03	kN
$F_{Gy}$	2,146	kN
$F_{Hx}$	9,075	kN
$F_{Hy}$	14,90	kN
$M_{motora}$	-1,542	kN · m

$a_2$	1,000	$m/s^2$
$\alpha_2$	7,000	$rad/s^2$
$a_3$	1,000	$m/s^2$
$\alpha_3$	7,000	$rad/s^2$
$\alpha_5$	5,000	$rad/s^2$
$\alpha_6$	3,000	$rad/s^2$

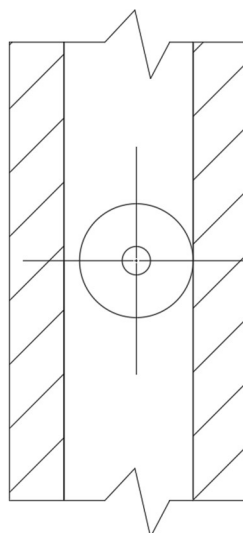
### 8.1 ZHODNOTENIE

Z výsledkov pre statický aj pre dynamický pohyb hneď vidíme, že sily  $F_{AN}$ ,  $F_{Bx}$ ,  $F_{Cx}$ ,  $F_{DN}$ ,  $F_{At}$  a  $F_{Dt}$  sú záporné. Aj keď pri silách  $F_{Bx}$  a  $F_{Cx}$  znamienko nehraje rolu pri zohľadňovaní funkčnosti väzieb B a C, záporné znamienko pri silách  $F_{AN}$  a  $F_{DN}$  znamená, že väzby A a D sú nefunkčné a valivé kolieska sa nedotýkajú rámu zdvižného zariadenia (obr. 8.2).



Obr. 8.2: Vázby A a D

Jedno z riešení pre tento problém by napríklad mohla byť úprava konštrukcie rámu zdvižného zariadenia tak, aby jednostranné posuvné väzby A a D boli obojstranné (obr. 8.3).



Obr. 8.3: Návrh riešenia

## 9 ZÁVER

V prvej časti bakalárskej práce sú vysvetlené základné pojmy zdvihov, no hlavne základné pojmy statiky, dynamiky a metódy počítania v dynamike. Spracované sú teoretické podklady a interpretácie rôznych autorov, ktorý sa k týmto problematikám vyjadrujú. V druhej časti práce je predvedené zdvižné zariadenie, ktoré je pohyblivou sústavou telies, kde sú pasívne účinky natoľko významnými prvkami, že ich nemôžeme zanedbať. Táto práca sa ďalej zaoberá výpočtom hnacej silovej dvojice tohto zariadenia a síl pôsobiacich vo väzbách jednotlivých telies sústavy metódou uvoľňovania.

V kapitolách č. 6 a 7 sú výpočty hnacej silovej dvojice (hnacieho momentu) realizované pre statický a dynamický zdvih bremena hore a spúšťanie bremena dolu. Pozreli sme sa tiež na závislosti výsledných síl na jednom z rozmerov (rozmer  $x$  na obr. 6.1, na strane 26), či na niektorých z pasívnych členov (rameno valivého odporu). V dynamickej časti sme sa pozreli na závislosť výsledných síl sústavy na zrýchlení zdvíhaného bremena, resp. zdvíhacej plošiny, na ktorej bremeno leží (teleso 4).

Z výsledkov vyplýva, že najmenší hnací moment je potrebný pri statickom spúšťaní bremena  $|M_{motora}| = 2,505 \text{ kN} \cdot \text{m}$  a maximálny pri dynamickom zdvíhaní bremena  $M_{motora} = 4,156 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , čo odpovedá výkonu motora  $P = 20,78 \text{ kW}$  (pri maximálnej rýchlosti zdvihu zdvíhaného bremena  $v = 1,5 \text{ m/s}$ ).

Zo závislosti hnacieho momentu na ramene  $x$  vidíme, že maximálny hnací moment klesol (pri hodnote  $x = 1,9 \text{ m}$  a maximálnej rýchlosti zdvihu zdvíhaného bremena  $v = 1,5 \text{ m/s}$ ) na hodnotu  $M_{motora} = 3,870 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , čo odpovedá výkonu motora  $P = 19,35 \text{ kW}$ . Výkon motora je teda oproti pôvodnej konfigurácii (pri hodnote  $x = 1,1 \text{ m}$ ) nižší o  $1,43 \text{ kW}$ .

Ďalšou myšlienkou bolo vypočítať stykové sily a hnací moment pre spúšťanie zariadenia bez zdvíhaného bremena. V kapitole č. 8 sme tento stav riešili, aby sme zistili záťaž hnacej jednotky pri chode zariadenia naprázdno. Pri výpočtoch sa však ukázalo, že daná konfigurácia nie je funkčná pri uvažovaných rozmeroch a konštrukcii telies sústavy.

## POUŽITÉ INFORMAČNÍ ZDROJE

- [1] Lifting Operations and Lifting Equipment Regulations 1998 [online], [cit. 2020-04-05]. Dostupné z:  
<[Lifting Operations and Lifting Equipment Regulations 1998 \(LOLER\) - Work equipment and machinery](#)>.
- [2] Guidelines for Creating Lifting PPlan for Lifting Operations On Workspaces 2014 [online], [cit. 2020-11-01]. Dostupné z:  
<[https://www.wshc.sg/files/wshc/upload/announcement/file/2014/LiftingPlanGuidelines\\_WGDRAFT\\_for\\_Industry\\_and\\_Public\\_Comment.pdf](https://www.wshc.sg/files/wshc/upload/announcement/file/2014/LiftingPlanGuidelines_WGDRAFT_for_Industry_and_Public_Comment.pdf)>.
- [3] SEMRÁD, Karol. *Základy technickej mechaniky* [online]. 2017 [cit. 2020-04-04]. Dostupné z:  
<<http://web.tuke.sk/lf-kli/Semrad%20Karol/Zaklady%20technickej%20mechaniky.pdf>>.
- [4] LANG, Milan. *Mechanika tuhých a poddajných telies*. Zvolen 1990.
- [5] FLORIAN, Zdeněk; ONDRÁČEK, Emanuel; PŘIKRYL, Karel. *Mechanika těles – statika*. Brno: PC-DIR, spol. s r.o. – Nakladatelství, Brno. [online]. [cit. 2020-05-05]. Dostupné z:  
<[http://www.student.chytrak.cz/mater\\_stat/statika\\_skripta.pdf](http://www.student.chytrak.cz/mater_stat/statika_skripta.pdf)>.
- [6] Škola pre mimoriadne nadané deti a Gymnázium: 2 *Mechanika hmotného bodu*, teória [online]. [cit. 2020-05-28]. Dostupné z:  
<[http://www.dvorniky.com/fyzika/2012-2013/5Kvinta/gV\\_T04\\_MHB\\_Dynamika\\_02\\_HmotnostHybnost.pdf](http://www.dvorniky.com/fyzika/2012-2013/5Kvinta/gV_T04_MHB_Dynamika_02_HmotnostHybnost.pdf)>.
- [7] Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Katedra mechaniky: *Biomechanika – studijní materiály* [online], [cit. 2020-05-28]. Dostupné z:  
<<https://www.kme.zcu.cz/kmet/bio/mechenmomhyb.php>>.
- [8] KRATOCHVÍL, Ctirad; SLAVIK Jaromír. *Mechanika telės dynamika*. Brno 2007.
- [9] FLORIÁN, Zdeněk; PELLANT, Karel a SUCHÁNEK, Miroslav: *Technická mechanika I – Statika*, Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojího inženýrství, 2004. [online]. [cit. 2021-02-05]. Dostupné z:  
<[http://www.umt.fme.vutbr.cz/images/opory/Mechanika%20I%20-%20Statika/Tech\\_mech\\_I.pdf](http://www.umt.fme.vutbr.cz/images/opory/Mechanika%20I%20-%20Statika/Tech_mech_I.pdf)>.

**ZOZNAM POUŽITÝCH SKRATIEK A SYMBOLOV**

$L$	[m]	Dĺžka
$m$	[kg]	Hmotnosť
$F$	[N]	Sila
$M$	[N · m]	Moment sily
$e$	[m]	Rameno valivého odporu
$r$	[m]	Polomer
$f$	[-]	Trecí súčiniteľ
$a$	[ $m/s^2$ ]	Zrýchlenie



## ZOZNAM PRÍLOH

Príloha č. 1 – grafy závislostí hnacieho momentu a sily  $F_{AN}$  na vzdialenosti  $x$

Príloha č. 2 – grafy závislostí hnacieho momentu, sily  $F_{AN}$  a  $F_{By}$  na hodnote ramena valivého odporu

Príloha č. 3 – grafy závislostí hnacieho momentu a sily  $F_{AN}$  na vzdialenosti  $x$ , statický pohyb dole.

Príloha č. 4 – grafy závislostí hnacieho momentu a sily  $F_{AN}$  na hodnote ramena valivého odporu, statický pohyb dole.

Príloha č. 5 – grafy závislostí hnacieho momentu a sily  $F_{AN}$  na hodnote ramena valivého odporu, statický pohyb dole – detail.

Príloha č. 6 – grafy závislostí hnacieho momentu a sily  $F_{AN}$  na vzdialenosti  $x$ , zrýchlený pohyb hore.

Príloha č. 7 – grafy závislostí hnacieho momentu a sily  $F_{AN}$  na hodnote ramena valivého odporu, zrýchlený pohyb hore.

Príloha č. 8 – graf závislosti hnacieho momentu na zrýchlení telesa 4, zrýchlený pohyb hore.

Príloha č. 9 – graf závislosti hnacieho momentu na zrýchlení telesa 4, zrýchlený pohyb dole.

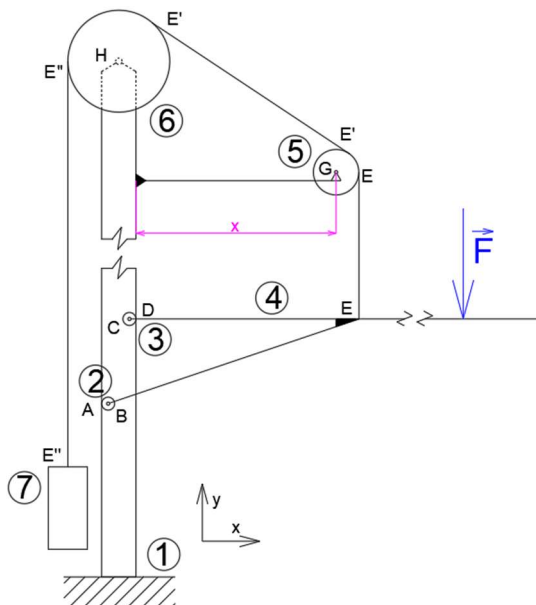
Príloha č. 10 – grafy závislostí hnacieho momentu a sily  $F_{AN}$  na vzdialenosti  $x$ , zrýchlený pohyb dole.

Príloha č. 11 – grafy závislostí hnacieho momentu a sily  $F_{AN}$  na hodnote ramena valivého odporu, zrýchlený pohyb dole.

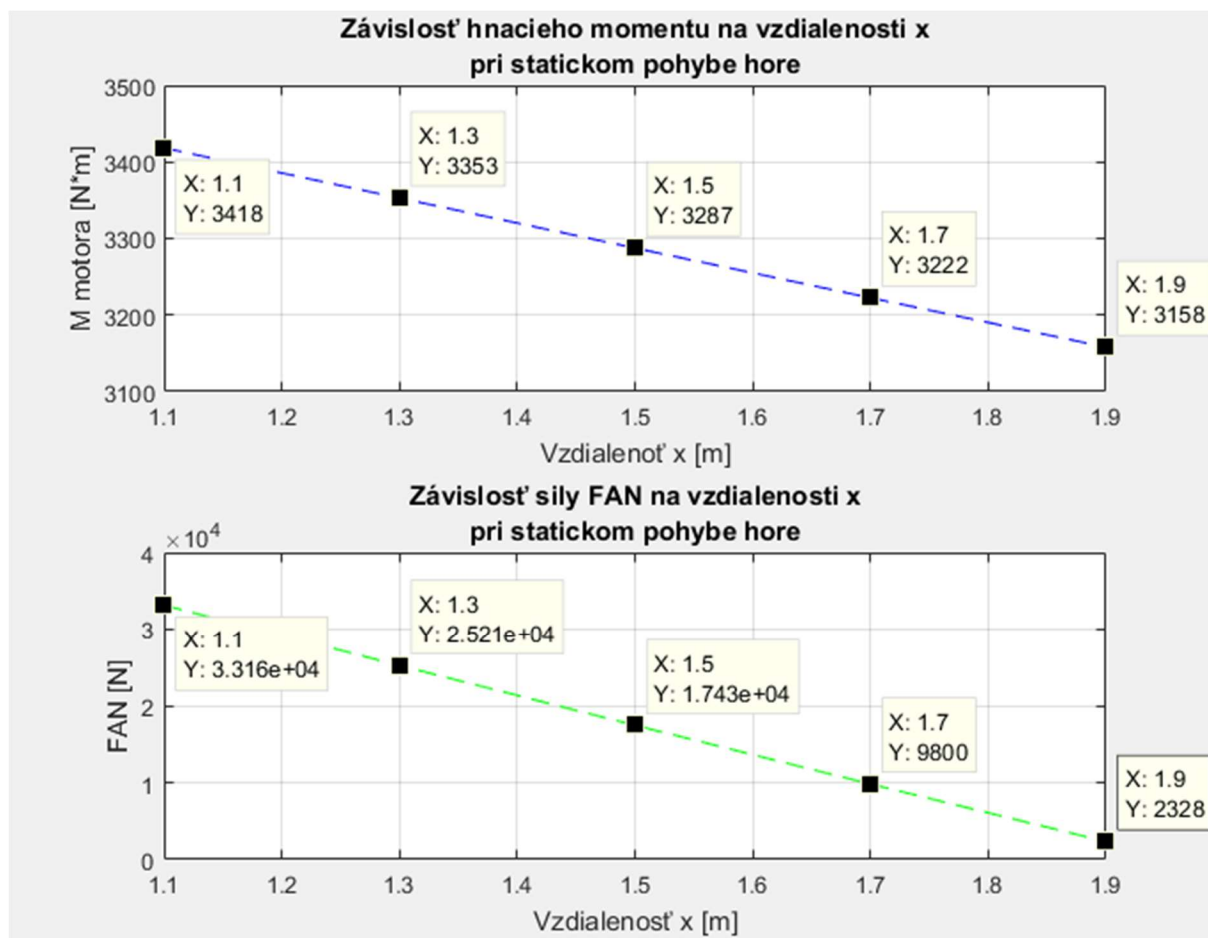
Príloha č. 12 – grafy závislostí hnacieho momentu a sily  $F_{AN}$  na hodnote ramena valivého odporu, zrýchlený pohyb dole – detail.

## PŘÍLOHY

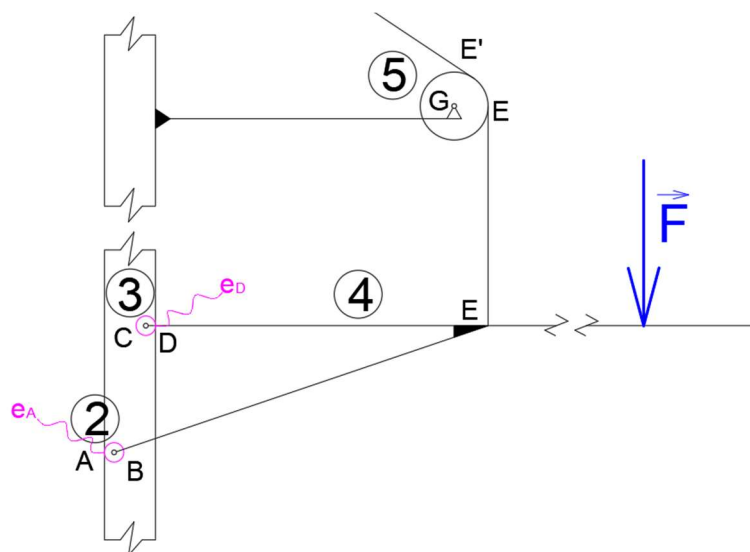
Príloha č. 1 – grafy závislostí hnacieho momentu a sily  $F_{AN}$  na vzdialenosti  $x$  (obr. P1), statický pohyb hore.



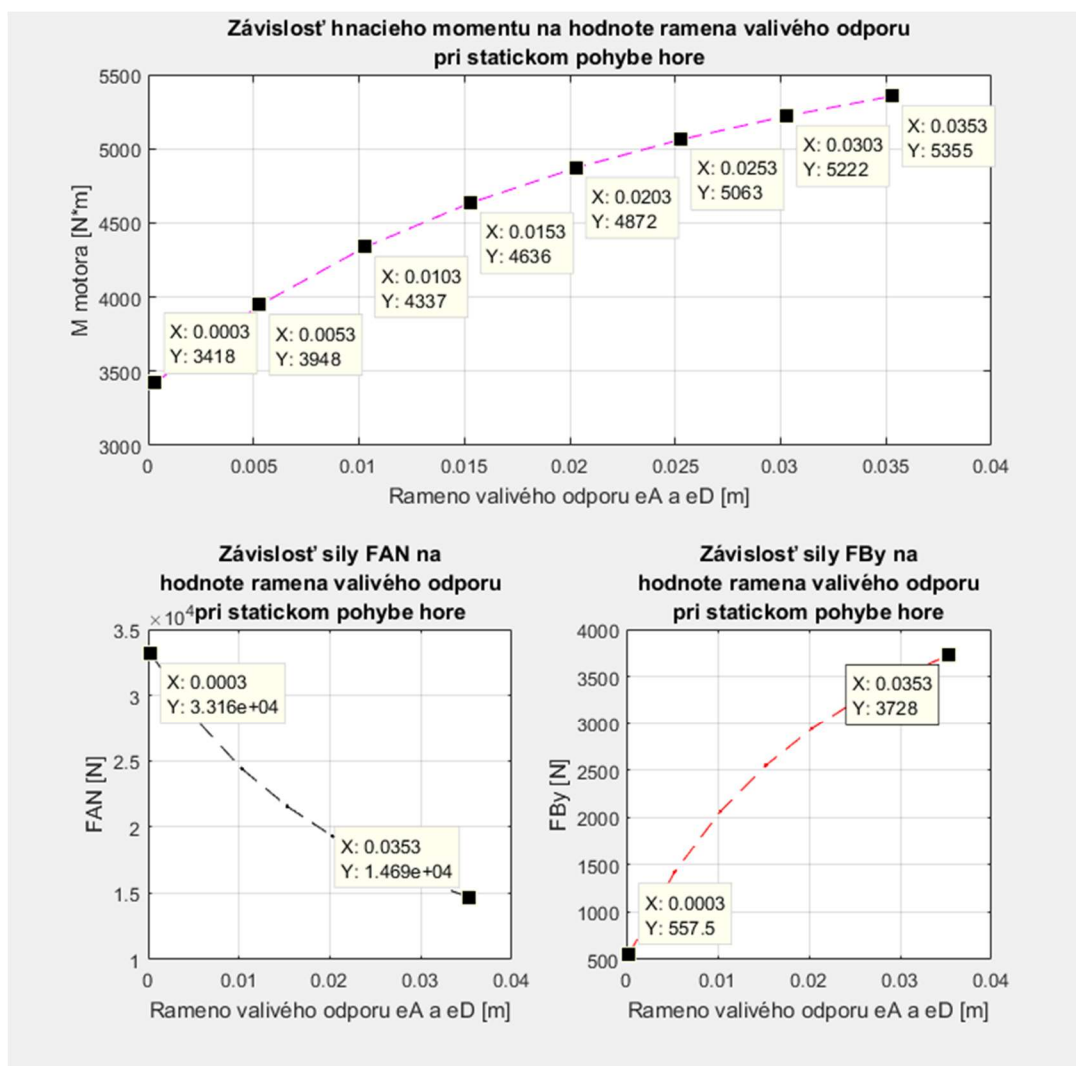
Obr. P1: náčrt zdvižného zariadenia



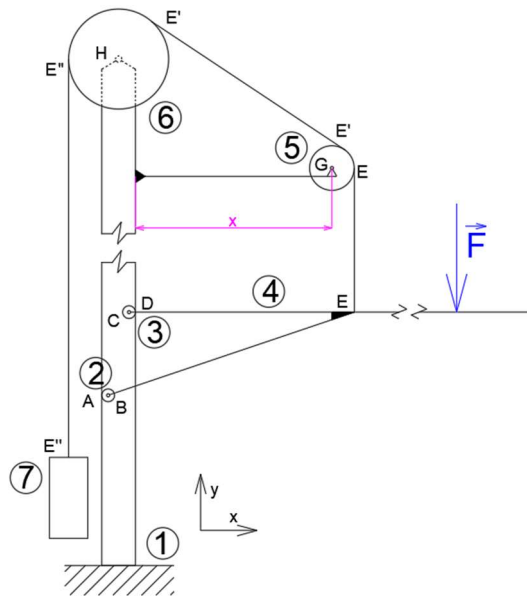
Príloha č. 2 – grafy závislostí hnacieho momentu, sily  $F_{AN}$  a  $F_{By}$  na hodnote ramena valivého odporu (Obr. P2), statický pohyb hore.



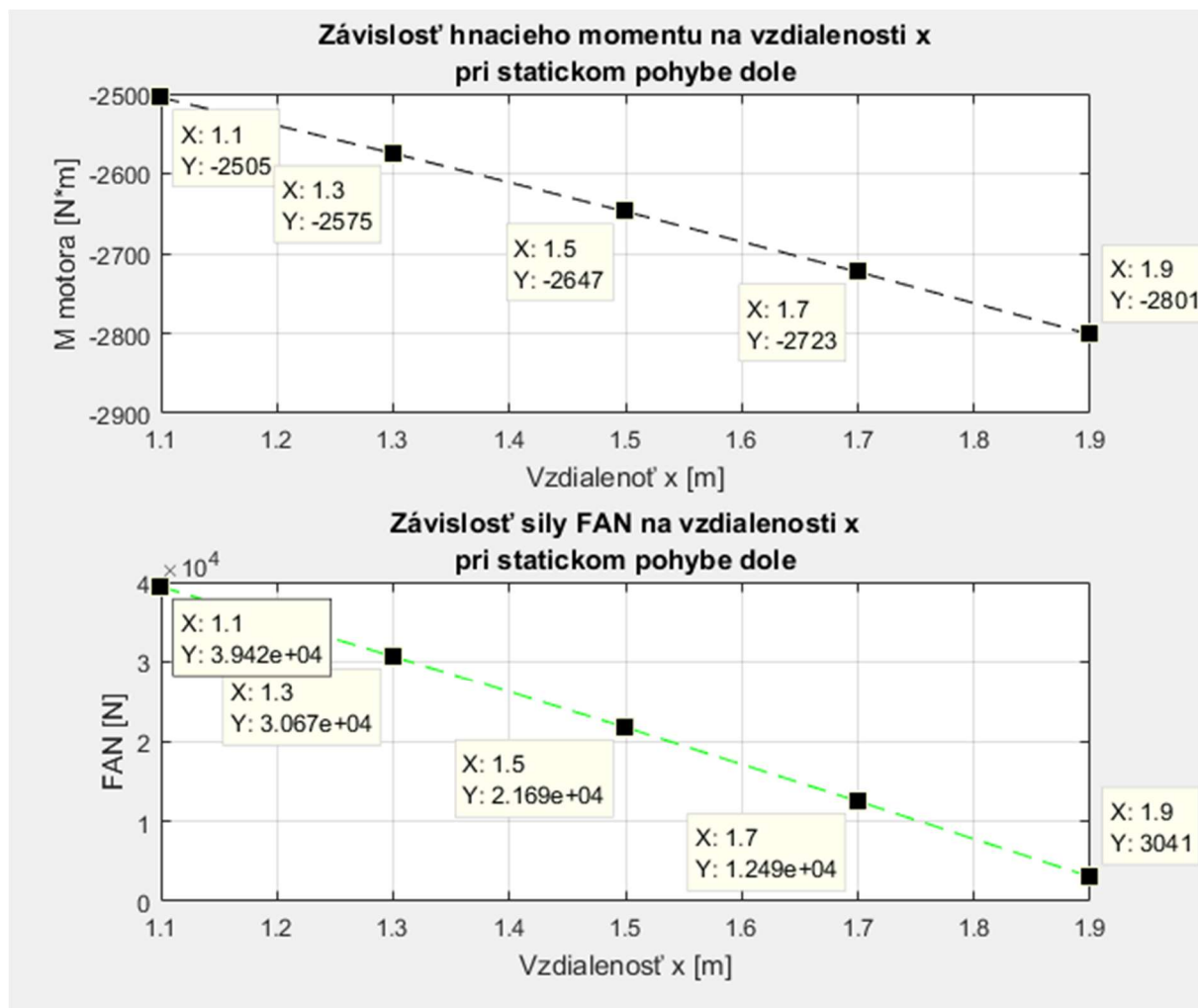
Obr. P2: detail zdvižného zariadenia



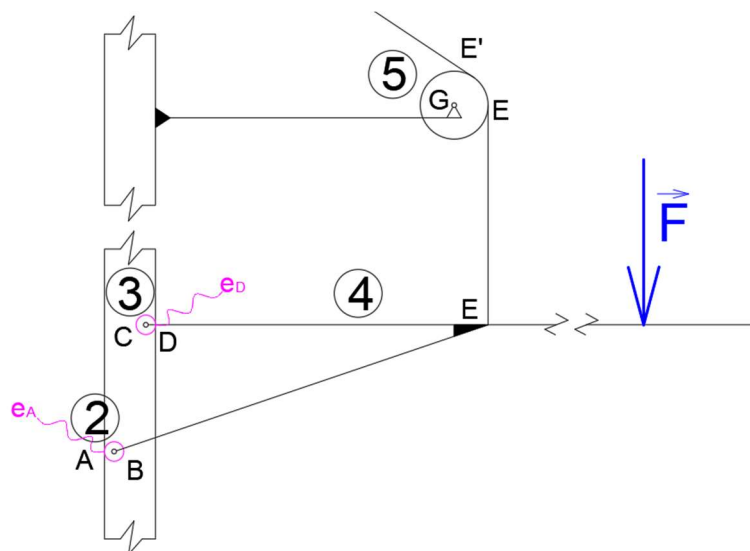
Príloha č. 3 – grafy závislostí hnacieho momentu a sily  $F_{AN}$  na vzdialenosti  $x$  (obr. P3), statický pohyb dole.



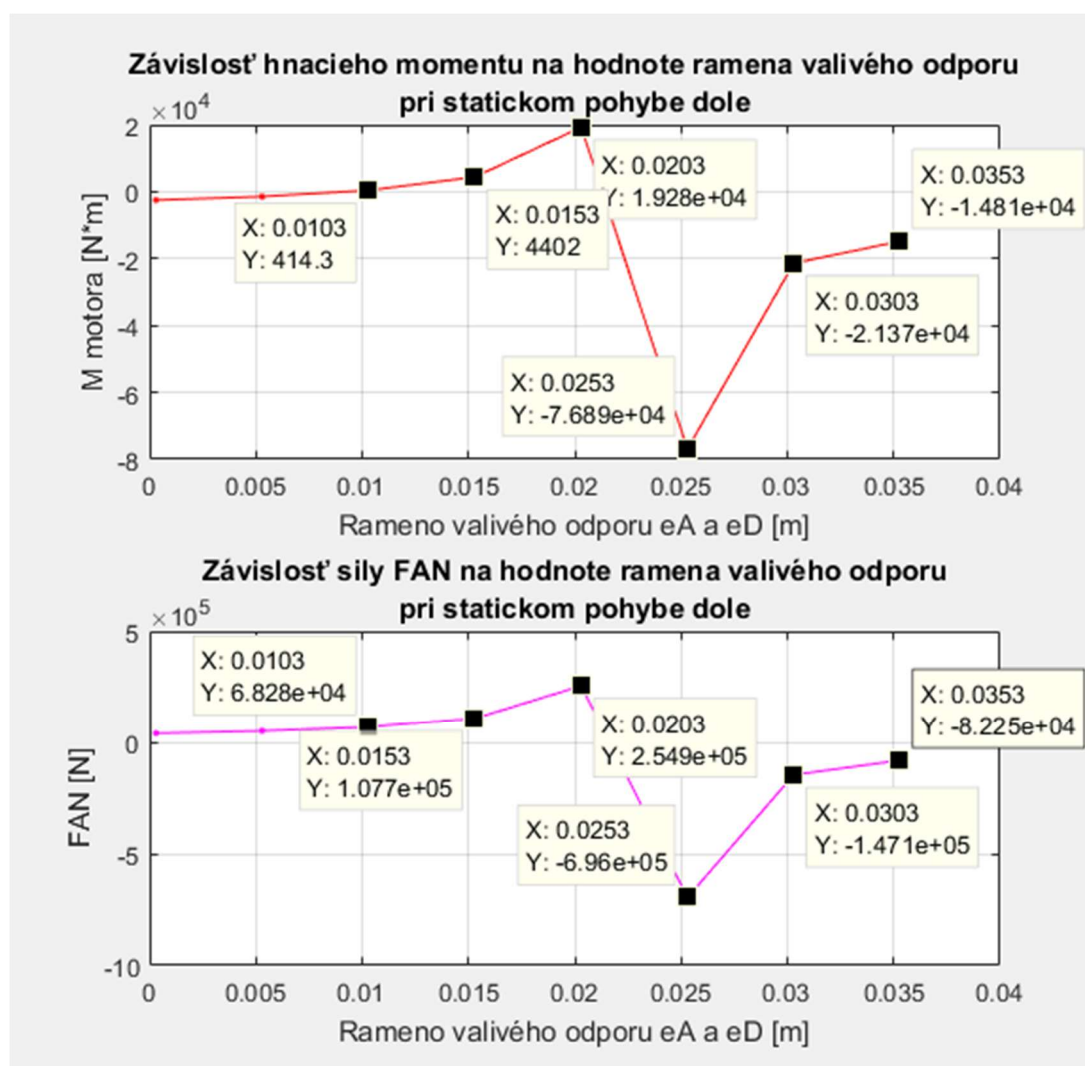
Obr. P3: náčrt zdvižného zariadenia



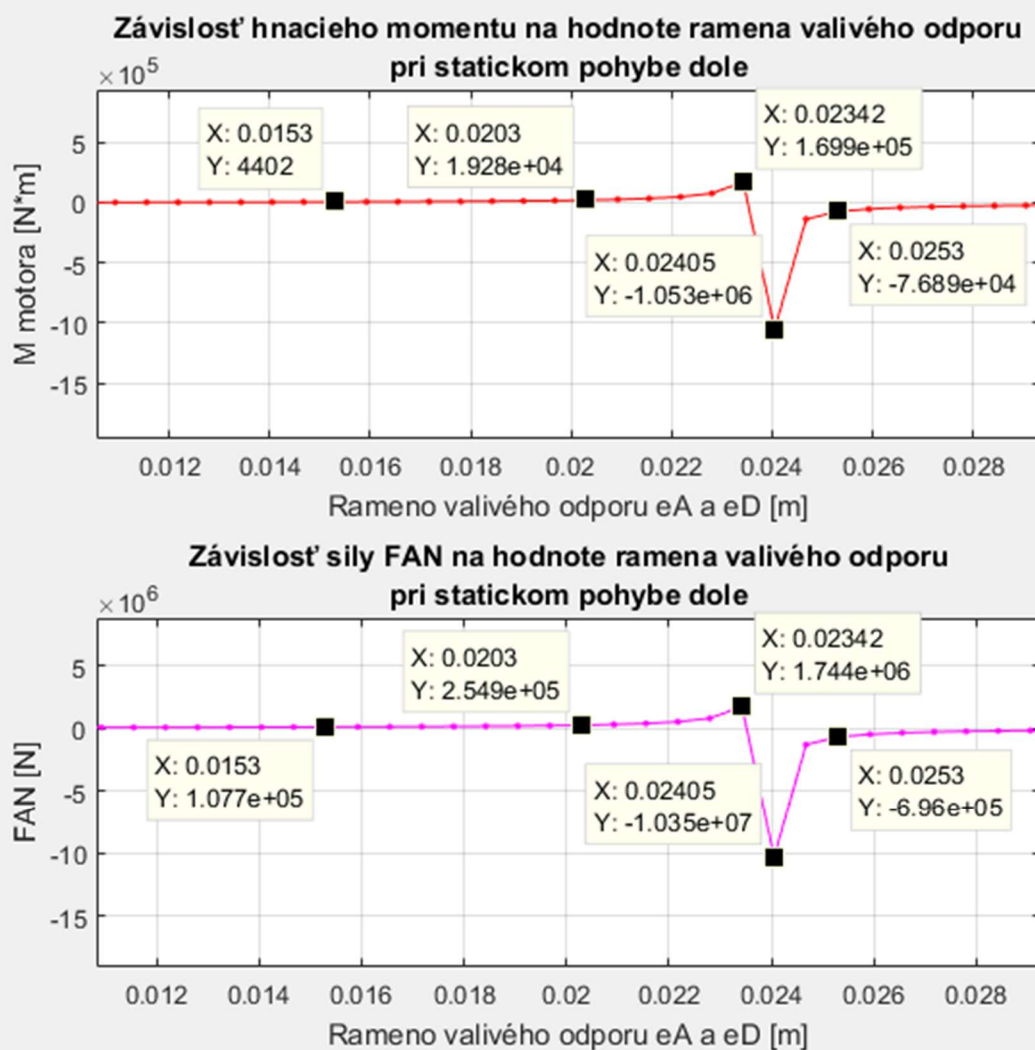
Príloha č. 4 – grafy závislostí hnacieho momentu a sily  $F_{AN}$  na hodnote ramena valivého odporu (obr. P4), statický pohyb dole.



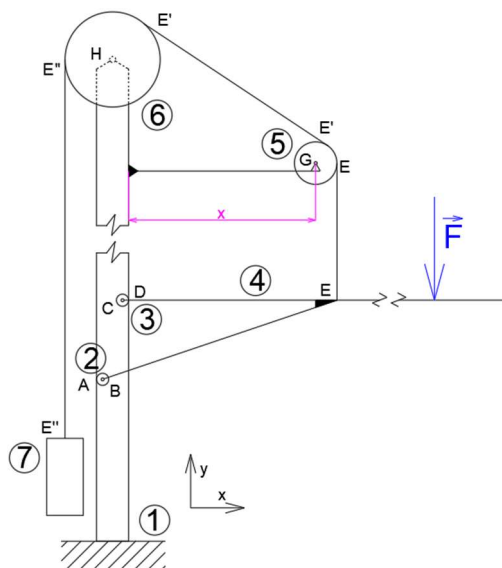
Obr. P4: detail zdvižného zariadenia



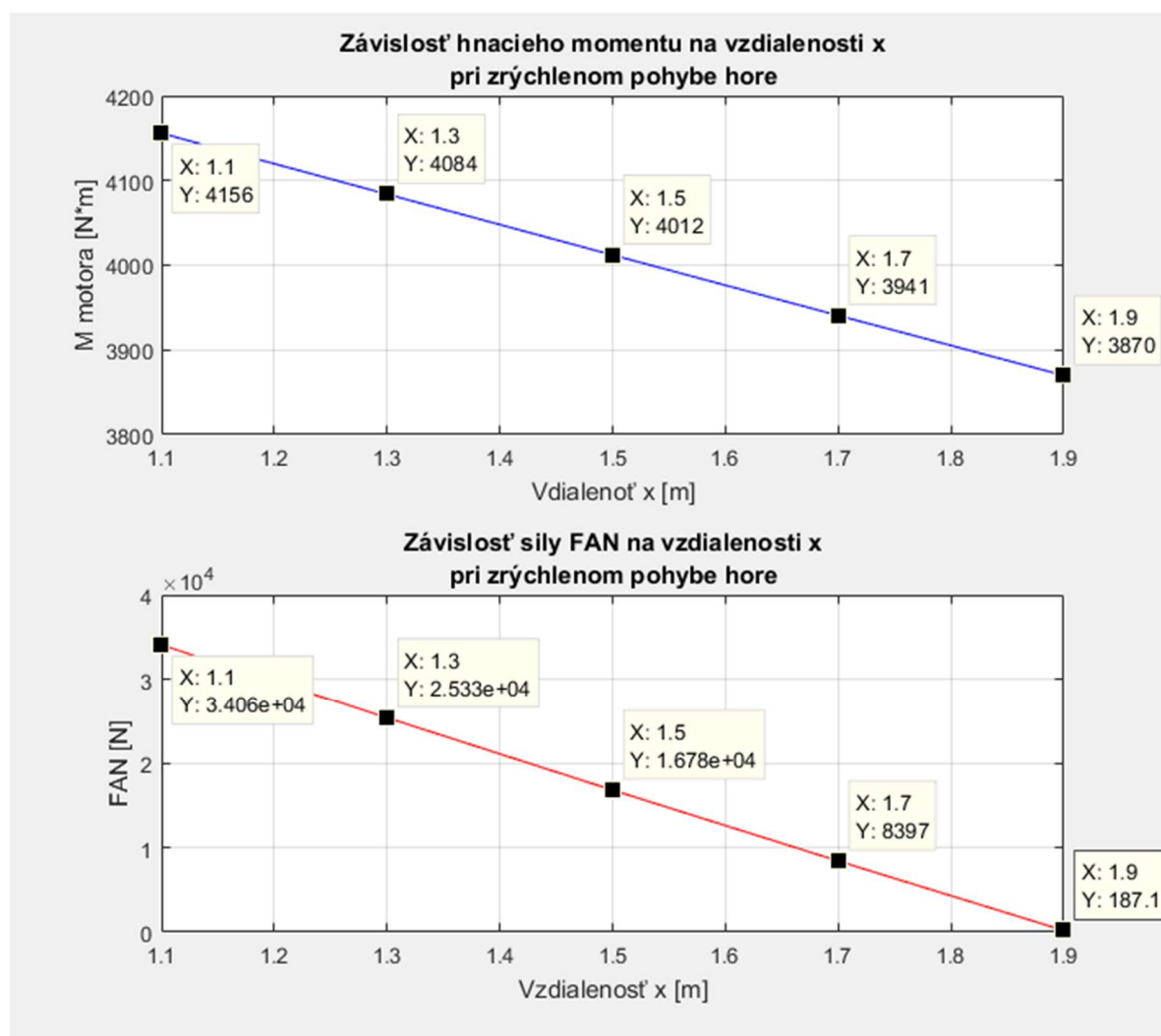
Príloha č. 5 – grafy závislostí hnacieho momentu a sily  $F_{AN}$  na hodnote ramena valivého odporu, statický pohyb dole – detail.



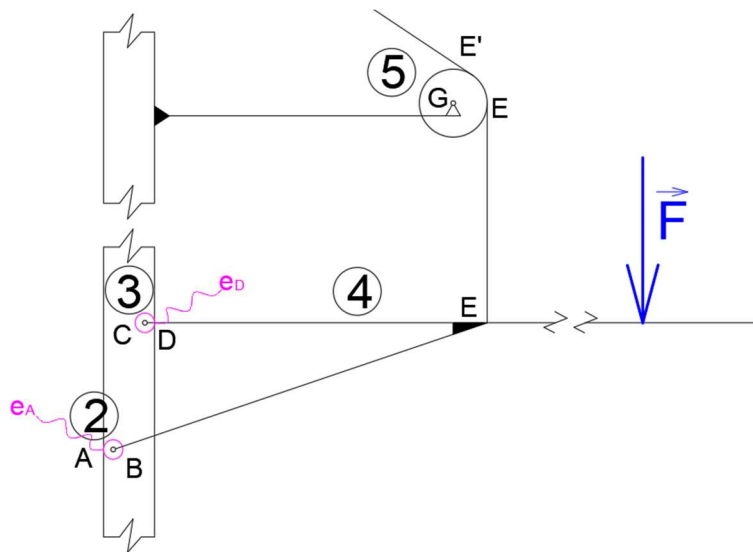
Príloha č. 6 – grafy závislostí hnacieho momentu a sily  $F_{AN}$  na vzdialenosti  $x$  (obr. P6), zrýchlený pohyb hore.



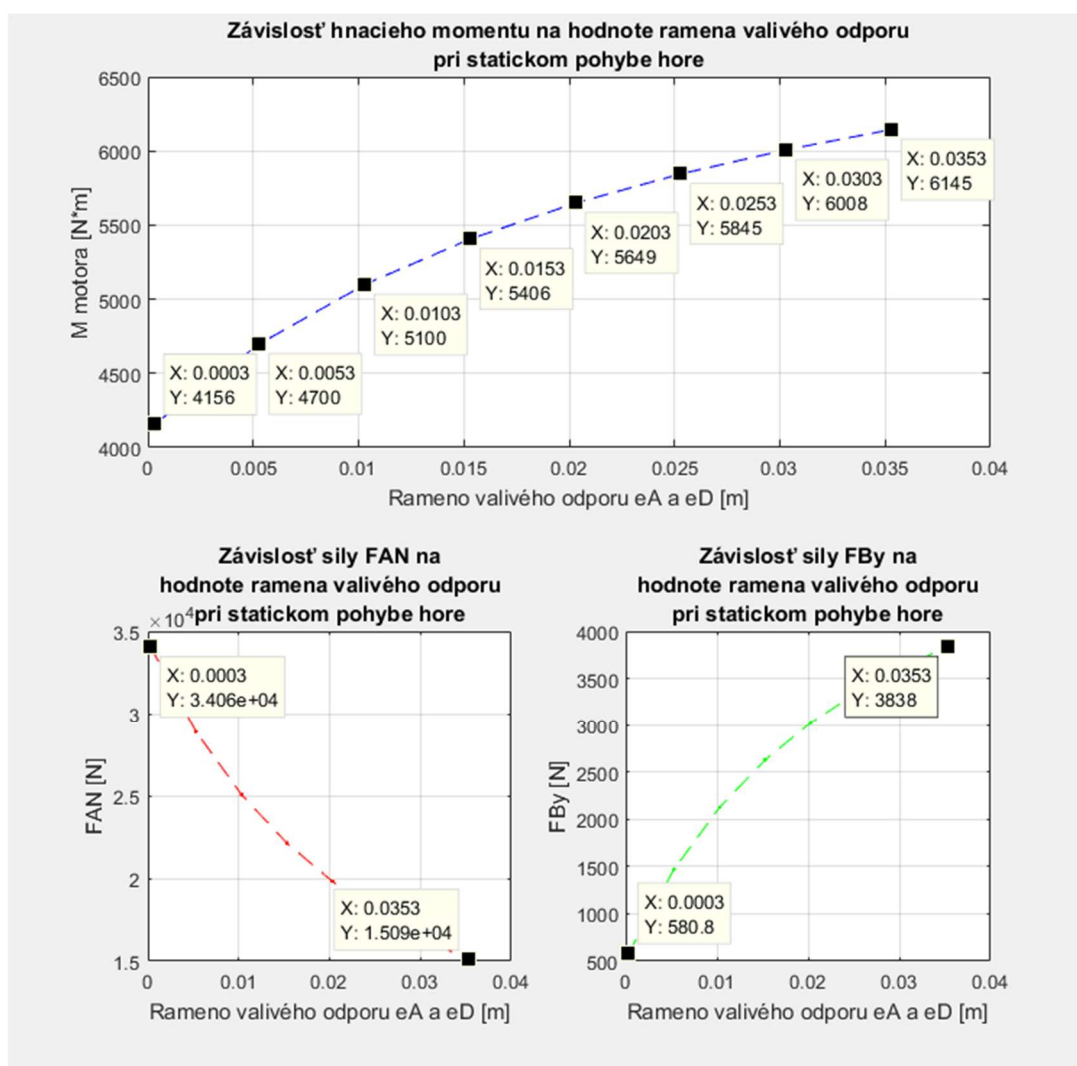
Obr. P6: náčrt zdvižného zariadenia



Príloha č. 7 – grafy závislostí hnacieho momentu a sily  $F_{AN}$  na hodnote ramena valivého odporu (obr. P7), zrýchlený pohyb hore.

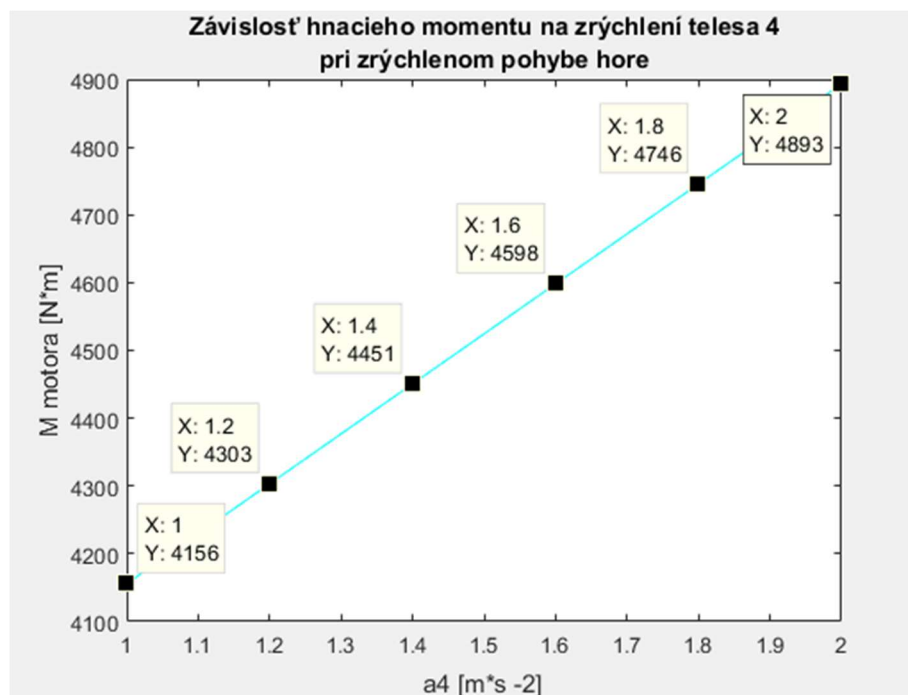


Obr. P7: detail zdvižného zariadenia

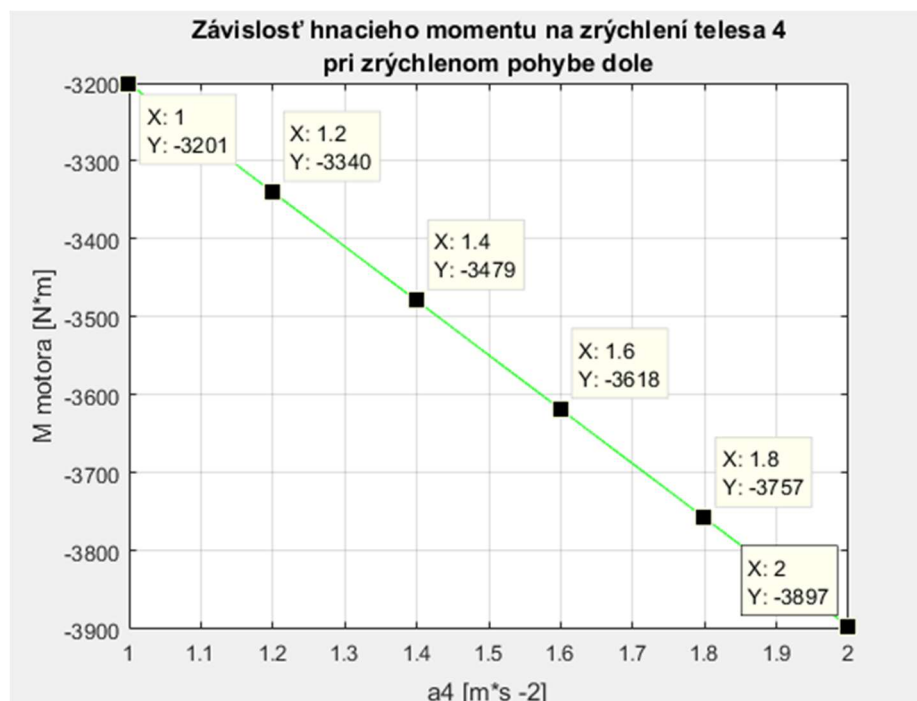




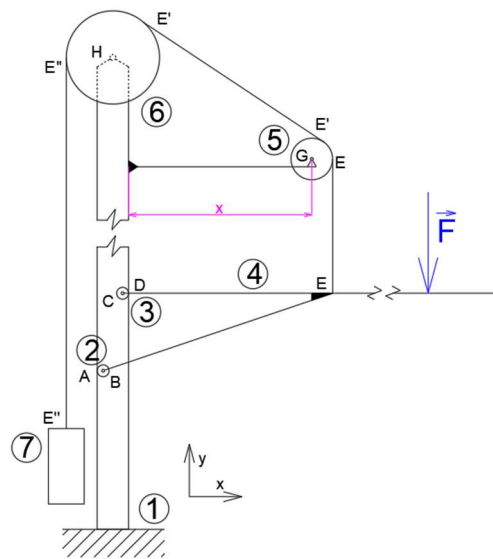
Príloha č. 8 – graf závislosti hnacieho momentu na zrýchlení telesa 4 ( $a_4$ ), zrýchlený pohyb hore.



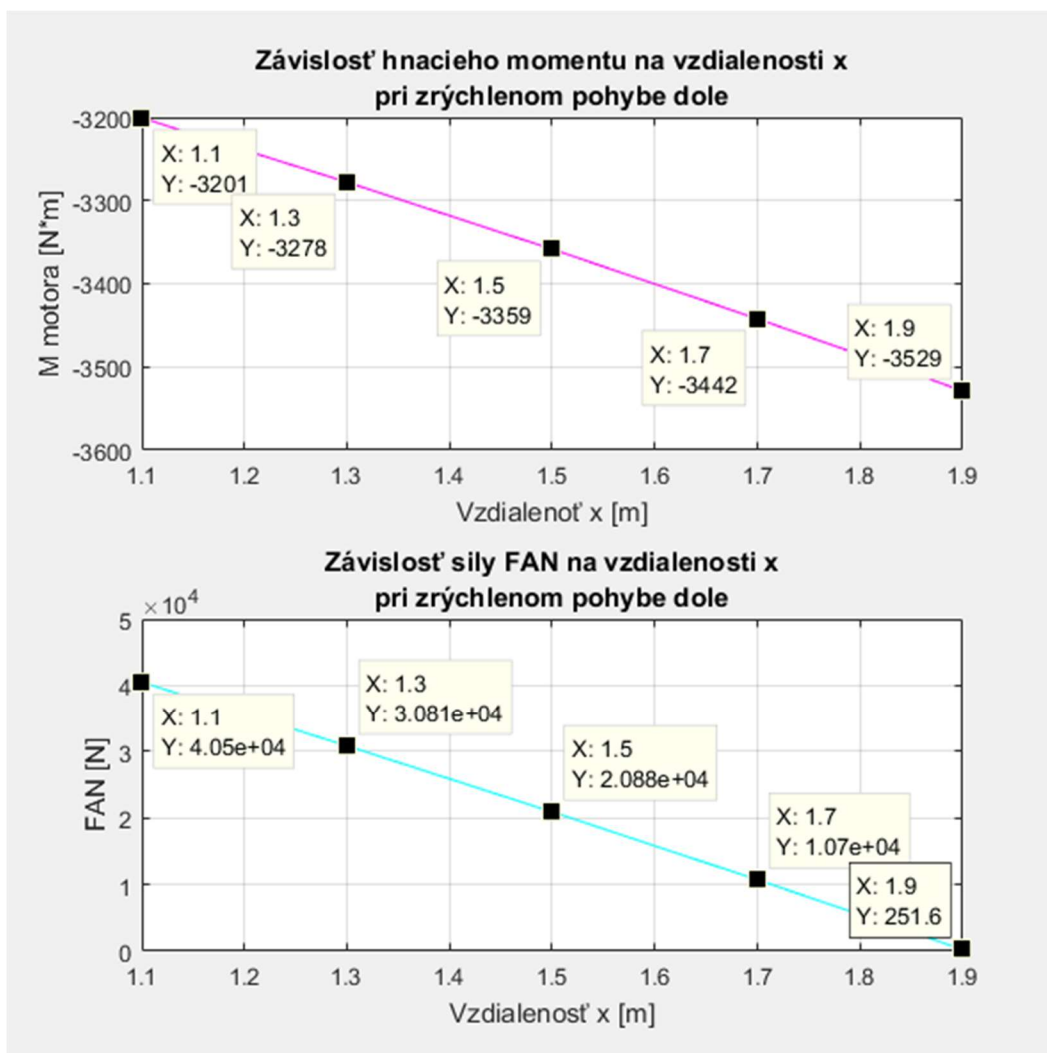
Príloha č. 9 – graf závislosti hnacieho momentu na zrýchlení telesa 4 ( $a_4$ ), zrýchlený pohyb dole.



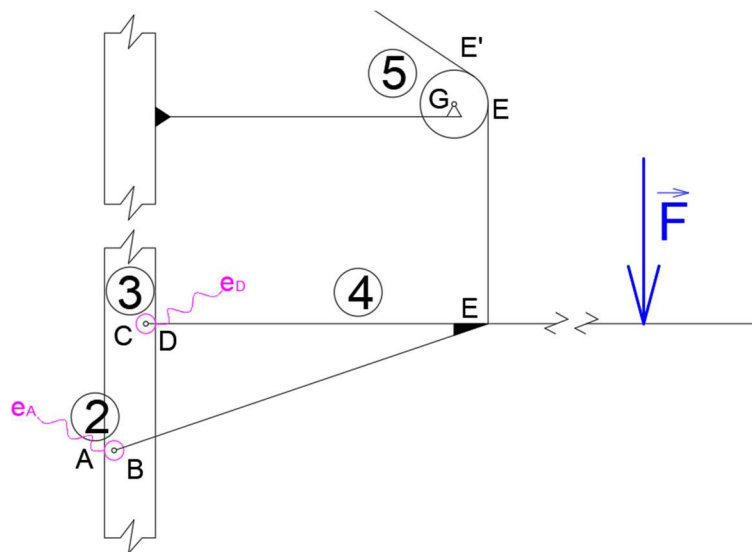
Príloha č. 10 – grafy závislostí hnacieho momentu a sily  $F_{AN}$  na vzdialenosti  $x$  (Obr. P10), zrýchlený pohyb dole.



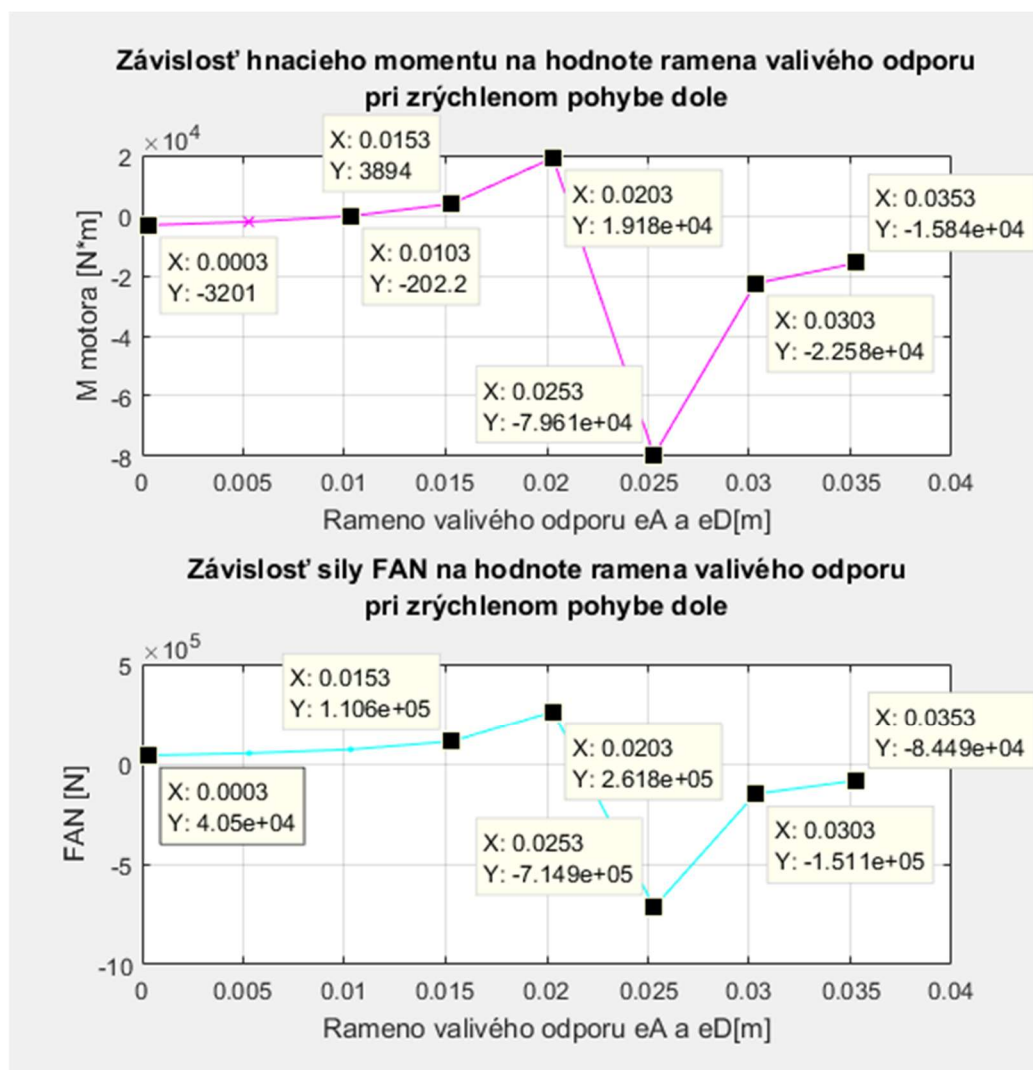
Obr. P10: náčrt zdvižného zariadenia



Príloha č. 11 – grafy závislostí hnacieho momentu a sily  $F_{AN}$  na hodnote ramena valivého odporu (obr. P11), zrýchlený pohyb dole.



Obr. P11: detail zdvižného zariadenia



Príloha č. 12 – grafy závislostí hnacieho momentu a sily  $F_{AN}$  na hodnote ramena valivého odporu, zrýchlený pohyb dole – detail.

